# КНИГА ЗА УЧИТЕЛЯ


БУЛВЕСТ 2000

Klett

**Книга за учителя**
**по математика**
**за 10. клас**

*Автори*
© Емил Миланов Колев, 2024 г.
© Иван Георгиев Георгиев, 2024 г.
© Стелиана Миткова Кокинова, 2024 г.

*Графичен дизайн*
© Николай Йорданов Пекарев, 2024 г.

*Издател*
© КЛЕТ БЪЛГАРИЯ, 2024 г.

ISBN 978-954-18-1430-7E

# ПРИМЕРНИ МЕТОДИЧЕСКИ РАЗРАБОТКИ НА УРОЦИ

## УРОК 17. ФОРМУЛА ЗА СБОРА НА ПЪРВИТЕ N ЧЛЕНА НА АРИТМЕТИЧНА ПРОГРЕСИЯ

**Вид на урока:** За нови знания

### 17. ФОРМУЛА ЗА СБОРА НА ПЪРВИТЕ $n$ ЧЛЕНА НА АРИТМЕТИЧНА ПРОГРЕСИЯ

**ЩЕ НАУЧИТЕ**

- *Как се пресмята сборът на първите n члена на аритметична прогресия*

Индексът $n$ показва колко събираеми има в дясната част на равенството.

За аритметична прогресия

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

с $S_n$ означаваме сбора на първите $n$ члена на прогресията, т.е.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

**ТЕОРЕМА 1.** За аритметична прогресия с първи член $a_1$ и разлика $d$ е изпълнено равенството

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Начин за запомняне на формулата за сбора на първите $n$ члена.

Формулата от Теорема 1 се запомня като: Сборът на първия и последния член, разделен на две, умножен по броя на членовете.

*Доказателство:* Записваме:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_i + \ldots + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_{n-i+1} + \ldots + a_2 + a_1$$

и събираме почленно двете равенства:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_i + a_{n-i+1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Равенствата следват от Теорема 2 от предишния урок.

Тъй като $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_i + a_{n-i+1} = \ldots = a_{n-1} + a_2 = a_n + a_1$, то горното равенство се записва във вида:

$$2S_n = (a_1 + a_n).n \Leftrightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n.$$

Когато знаем първия член $a_1$ и разликата $d$ вместо да намираме $a_n$ е по-лесно да използваме тази формула.

Ако във формулата от Теорема 1 заместим $a_n$ с $a_1 + (n - 1)d$, ще получим

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n = \frac{(a_1 + a_1 + (n-1)d)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

**1** За аритметична прогресия намерете:

а) $S_{11}$, ако $a_1 = 67$ и $a_{11} = -1$; б) $S_{22}$, ако $a_1 = 0{,}5$ и $d = 3$.

*Решение:* а) От $S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$ при $n = 11$ получаваме

$$S_{11} = \frac{(a_1 + a_{11})}{2} \cdot 11 = \frac{(67 + (-1))}{2} \cdot 11 = 363.$$

б) От $S_n = \frac{(2a_1 + (n-1)d)}{2} \cdot n$ при $n = 22$ получаваме

$$S_{22} = \frac{(2a_1 + 21d)}{2} \cdot 22 = \frac{(1 + 63)}{2} \cdot 22 = 704.$$

42

Приложение на двете формули за намиране на $S_n$.

За намиране на $S_n$ има три основни задачи.

**2** Намерете първия член $a_1$ на аритметична прогресия, за която

$$d = 1 \text{ и } S_{32} = 112.$$

По дадени $n$, $S_n$ и $d$ да се намери $a_1$.

*Решение:* Във формулата $S_n = \dfrac{(2a_1 + (n-1)d)}{2} \cdot n$ заместваме $d = 1$, $n = 32$ и $S_{32} = 112$ и получаваме:

$$112 = \frac{(2a_1 + (32-1)1)}{2} \cdot 32 = (2a_1 + 31)16 \Leftrightarrow 7 = 2a_1 + 31 \Leftrightarrow a_1 = -12.$$

**3** Намерете разликата $d$ на аритметична прогресия, за която

$$a_1 = \frac{1}{2} \text{ и } S_9 = -31\frac{1}{2}.$$

По дадени $n$, $S_n$ и $a_1$ да се намери $d$.

*Решение:* От $S_9 = \dfrac{(2a_1 + (9-1)d)}{2} \cdot 9 = \dfrac{(1+8d)}{2} \cdot 9$ получаваме:

$$-31\frac{1}{2} = \frac{(1+8d)}{2} \cdot 9 \Leftrightarrow -63 = (1+8d).9 \Leftrightarrow d = -1.$$

**4** Дадена е аритметична прогресия с първи член $a_1 = -15$ и разлика $d = 3$. Намерете $n$, ако $S_n = 39$.

По дадени $a_1$, $d$ и $S_n$ да се намери $n$.

*Решение:* От формулата $S_n = \dfrac{(2a_1 + (n-1)d)}{2} \cdot n$ при $S_n = 39$, $a_1 = -15$ и $d = 3$ получаваме:

$$78 = n(3n - 33) \Leftrightarrow 3n^2 - 33n - 78 = 0.$$

Корените на това квадратно уравнение са $n_1 = 13$ и $n_2 = -2$.
Тъй като $n > 0$, получаваме $n = 13$.

### ЗАДАЧИ

**1.** Намерете:

а) $S_9$, ако $a_1 = -4$ и $a_9 = 22$;

б) $S_{24}$ ,ако $a_1 = 17$ и $a_{24} = -69$;

в) $S_{10}$, ако $a_1 = 36{,}5$ и $d = -8{,}3$;

г) $S_{23}$, ако $a_1 = -\dfrac{1}{2}$ и $d = \dfrac{7}{22}$.

**2.** Намерете първия член $a_1$ на аритметична прогресия, за която:

а) $S_{17} = -34$ и $d = 2$; б) $S_6 = 96$ и $d = -1$;

в) $S_{39} = 130$ и $d = \dfrac{1}{3}$; г) $S_{25} = 75$ и $d = 8$.

**3.** Намерете разликата $d$ на аритметична прогресия, за която:

а) $a_1 = 1$ и $S_8 = 36$; б) $a_1 = 2{,}5$ и $S_4 = 50$;

в) $a_1 = \dfrac{1}{2}$ и $S_9 = -\dfrac{63}{2}$; г) $a_1 = -9$ и $S_9 = 0$.

**4.** Намерете $n$, ако:

а) $a_1 = 7$, $d = -1$ и $S_n = 28$;

б) $a_1 = -3$, $d = 8$ и $S_n = 102$;

в) $a_1 = 0$, $d = 4$ и $S_n = 220$;

г) $a_1 = \dfrac{2}{3}$, $d = \dfrac{5}{6}$ и $S_n = 36$.

Задачи за намиране на едно от числата $a_1$, $d$ и $n$ по дадени $S_n$ и другите две числа.

43

Задача за прилагане на двете основни формули

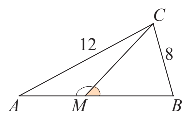
## УРОК 38. РЕШАВАНЕ НА ПРОИЗВОЛЕН ТРИЪГЪЛНИК С ПОМОЩТА НА СИНУСОВАТА ТЕОРЕМА. УПРАЖНЕНИЕ

**Вид на урока:** Упражнение

### 38. РЕШАВАНЕ НА ПРОИЗВОЛЕН ТРИЪГЪЛНИК С ПОМОЩТА НА СИНУСОВАТА ТЕОРЕМА. УПРАЖНЕНИЕ

**ЩЕ УПРАЖНИТЕ**

- *Как се решава произволен триъгълник, като се използва синусовата теорема*




**1** В $\Delta ABC$ са дадени $AC = 12$ cm, $BC = 8$ cm. Точка $M$ е от страната $AB$, като $\sin\sphericalangle BMC = 0{,}4$. Да се намерят дължините $R_{\Delta AMC}$ и $R_{\Delta BMC}$ на радиусите на описаните окръжности съответно около $\Delta AMC$ и $\Delta BMC$.

Директно приложение на синусовата теорема.

*Решение:* От синусовата теорема за $\Delta BMC$ получаваме

$$2R_{\Delta BMC} = \frac{BC}{\sin\sphericalangle BMC} = \frac{8}{0{,}4} = 20,$$

откъдето намираме $R_{\Delta BMC} = 10$ cm.

Използване на равенството $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$ и приложение на синусовата теорема.

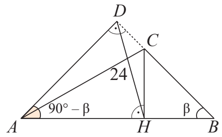
От $\sphericalangle AMC = 180° - \sphericalangle BMC$ следва, че

$$\sin\sphericalangle AMC = \sin\left(180° - \sphericalangle BMC\right) = \sin\sphericalangle BMC = 0{,}4.$$

Тогава от синусовата теорема за $\Delta AMC$ следва

$$2R_{\Delta AMC} = \frac{AC}{\sin\sphericalangle AMC} = \frac{12}{0{,}4} = 30,$$

откъдето $R_{\Delta AMC} = 15$ cm.




**2** Отсечките $AD$ и $CH$ са височини в тъпоъгълния $\Delta ABC$, в който $\sphericalangle C > 90°$. Ако $DH = 24$ cm и $\sin\sphericalangle ABC = \frac{3}{5}$, да се намери страната $AC$.

*Решение:* Да означим $\sphericalangle ABC = \beta$. В $\Delta BAD$ имаме $\sphericalangle BAD = 90° - \beta$ и като използваме, че от $\beta < 90° \Rightarrow \cos\beta > 0$, получаваме

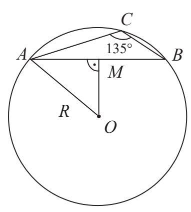
Използване на равенството $\sin(90° – \beta) = \cos\beta$ и основното тригонометрично тъждество $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ за намиране на $\sin\sphericalangle BAD$.

$$\sin\sphericalangle BAD = \sin\left(90° - \beta\right) = \cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

От $\sphericalangle AHC = \sphericalangle ADC = 90°$ следва, че четириъгълникът $AHCD$ е вписан в окръжност с диаметър $AC$. Прилагаме синусовата теорема за $\Delta AHD$:

Използване на синусовата теорема за намиране на $AC$.

$$AC = \frac{HD}{\sin\sphericalangle HAD} = \frac{HD}{\sin\sphericalangle BAD} \Leftrightarrow AC = \frac{24.5}{4} = 30 \text{ cm}.$$




**3** Даден е $\Delta ABC$, за който $AB = 10\sqrt{2}$ cm и $\sphericalangle ACB = 135°$. Да се намери разстоянието от центъра на описаната около триъгълника окръжност до страната $AB$.

*Решение:* Нека $O$ е центърът на описаната около $\Delta ABC$ окръжност, а $OM$ е разстоянието от $O$ до страната $AB$. Тогава $M$ е средата на $AB$ и

$$AM = \frac{1}{2}AB = 5\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Свойство на хорда в окръжност.

90

## УРОК 38. РЕШАВАНЕ НА ПРОИЗВОЛЕН ТРИЪГЪЛНИК С ПОМОЩТА НА СИНУСОВАТА ТЕОРЕМА. УПРАЖНЕНИЕ

Прилагаме синусовата теорема за $\Delta ABC$

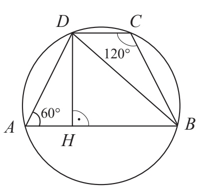
$$\frac{AB}{\sin 135^\circ} = 2R \Leftrightarrow R = 10 \text{ cm}.$$

От питагоровата теорема за $\Delta AOM$ намираме:

$$OM^2 = AO^2 - AM^2 = 10^2 - \left(5\sqrt{2}\right)^2 = 50 \text{ и } OM = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ cm}.$$

**4** Да се намери радиусът на окръжността, описана около трапец с основи 9 cm и 3 cm и ъгъл при малката основа 120°.

*Решение:* Нека трапецът $ABCD$ с основи $AB = a = 9$ cm, $DC = b = 3$ cm и $\sphericalangle BCD = 120^\circ$ е вписан в окръжност с радиус $R$, а $DH$ е неговата височина. Щом трапецът е вписан, то той е равнобедрен и




$$\sphericalangle BAD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ,\ AH = \frac{a-b}{2} = 3 \text{ cm},\ BH = \frac{a+b}{2} = 6 \text{ cm}.$$

В правоъгълния $\Delta AHD$ имаме $\dfrac{DH}{AH} = \operatorname{tg} \sphericalangle A \Leftrightarrow DH = AH.\operatorname{tg} 60^\circ = 3\sqrt{3}$.

От питагоровата теорема за $\Delta BHD$ намираме:

$$BD^2 = BH^2 + DH^2 = 6^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 36 + 27 = 63 \text{ и } BD = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}.$$

Прилагаме синусовата теорема за $\Delta BCD$:

$$\frac{BD}{\sin \sphericalangle BCD} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{BD}{2\sin 120^\circ} = \frac{3\sqrt{7}}{2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{21} \text{ cm}.$$

### ЗАДАЧИ

**1.** Радиусът на описаната около $\Delta ABC$ окръжност е $17\sqrt{2}$ cm и $\cos \sphericalangle BAC = -\dfrac{4}{\sqrt{17}}$. Намерете дължината на страната $BC$.

**2.** Върху страната $AB$ на $\Delta ABC$ е избрана точка $M$ така, че $\sin \sphericalangle BMC = 0{,}6$. Намерете $AC$ и $BC$, ако дължините на радиусите на описаните около $\Delta AMC$ и $\Delta BMC$ окръжности са съответно $R_{\Delta AMC} = 15$ cm и $R_{\Delta BMC} = 10$ cm.

**3.** Радиусът на описаната около $\Delta ABC$ окръжност е $8\sqrt{3}$ cm, $\sphericalangle BAC = 60^\circ$, $AB : AC = 2 : 1$, а $AL$ е ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ $\left(L \in BC\right)$. Намерете дължината на отсечката $CL$.

**4.** През точка $M$, външна за окръжност $k$ с радиус 10 cm, са построени допирателна $MC$ и секуща $MAB$. Намерете $AC$, ако $\sphericalangle MCA = 45^\circ$.

**5.** Ако $BC$ е най-голямата страна в разностранния $\Delta ABC$, а $d$ е диаметърът на описаната около триъгълника окръжност и $BC : d = 1 : \sqrt{2}$, намерете мярката на $\sphericalangle BAC$.

**6.** Даден е $\Delta ABC$ с $\sphericalangle C = 45^\circ$ и $AB = 6\sqrt{2}$ cm. Окръжност $k$ с диаметър $AB$ пресича $AC$ и $BC$ в точки $M$ и $N$. Намерете дължината на отсечката $MN$.

**7.** Мярката на $\sphericalangle BAC$ е $22^\circ 30'$, а точката $C$ се намира на равни разстояния от правите $AB$ и $AD$, като $CD \perp AD$, $CB \perp AB$. Ако $AC = 10$ cm, намерете $BD$.

**8.** Равнобедреният трапец $ABCD$ е вписан в окръжност с радиус $R$. Ако $CD = R$ и $\sphericalangle BAC = 15^\circ$, намерете диагонала на трапеца.

91

Приложение на синусовата теорема.

Приложение на питагоровата теорема.

Приложение на синусовата теорема в по-сложни задачи.

Използване на свойствата на равнобедрения трапец за намиране на $BH$.

Приложение на синусовата теорема.

## УРОК 47. РЕШАВАНЕ НА ТРИЪГЪЛНИК. ТЕМА ЗА САМОКОНТРОЛ

Задачи със свободен отговор, за решаването на които се прилагат комбинирани разсъждения на базата на основни знания и формули.

Задачи с избираем отговор за проверка на основни знания и формули.

### 47. РЕШАВАНЕ НА ТРИЪГЪЛНИК. ТЕМА ЗА САМОКОНТРОЛ

**I част**

**1.** Стойността на израза

$\sin 60^\circ - \cos 120^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{cotg} 90^\circ$ е:

А) $3+\sqrt{3}$ Б) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$

В) $3-\sqrt{3}$ Г) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$

**2.** Стойността на израза

$\dfrac{\sin^2 25^\circ + \sin^2 65^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ . \operatorname{tg} 55^\circ}{2}$ е:

А) –1 Б) 0

В) $\dfrac{1}{2}$ Г) 1

**3.** За триъгълника $ABC$ е дадено, че

$$\sin\alpha : \sin\beta = \sqrt{5} : 5 .$$

За дължините на страните $a$ и $b$ е изпълнено:

А) $a = 5b$ Б) $a = \sqrt{5}b$

В) $a = \dfrac{\sqrt{5}}{5}b$ Г) $a = \dfrac{1}{5}b$

**4.** Триъгълникът $ABC$ е със страна $BC$ = 10 cm и $\sphericalangle BAC = 150^\circ$. Дължината на окръжността, описана около триъгълника, е:

А) $10\pi$ Б) $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}\pi$

В) $20\pi$ Г) $10\sqrt{3}\pi$

**5.** Триъгълникът $ABC$ е със страни $BC$ = 4 cm $AC$ = 8 cm и $AB = 4\sqrt{7}$ cm. Дължината на медианата към най-голямата страна е:

А) $2\sqrt{3}$ Б) $4\sqrt{3}$

В) $2\sqrt{21}$ Г) $4\sqrt{21}$

**II част**

**6.** Ако $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$, намерете стойността на израза $A = \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$.

**7.** Даден е $\Delta ABC$, в който $AC$ = 4 cm, $BC$ = 8 cm и $\sphericalangle ACB = 120^\circ$. Намерете дължината на ъглополовящата $CL$ $(L \in AB)$.

**III част**

**8.** Даден е $\Delta ABC$ с ъглополовяща $BD$. Намерете лицето на триъгълника, ако $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle CAB$ и $AC = 3CD$ = 18 cm.

108

Задача за подробно описване на решението.

Проверка на знания за перпендикулярни и успоредни прави.

Проверка на знания за намиране на обем на пирамида, един от околните ръбове на която е перпендикулярен на равнината на основата.

## 67. ЕЛЕМЕНТИ ОТ СТЕРЕОМЕТРИЯТА. ТЕМА ЗА САМОКОНТРОЛ

**I част**

**1.** Кое от твърденията А), Б) и В) е НЕВЯРНО?

А) Ако две прави са успоредни на трета, те са успоредни помежду си

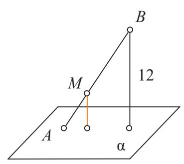
Б) Ако две прави са перпендикулярни на трета, те са успоредни помежду си

В) Ако две прави са перпендикулярни на равнина, те са успоредни помежду си

Г) И трите твърдения са верни

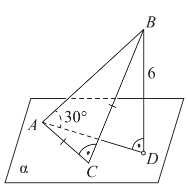
**2.** Точката $A$ лежи в равнина α, а точката $B$ е на разстояние 12 cm от α. Ако $M$ дели отсечката $AB$ вътрешно в отношение $MA:MB=1:3$, то разстоянието от $M$ до α е:

А) 2 cm  Б) 3 cm  В) 4 cm  Г) 9 cm




**3.** Катетът $AC$ на правоъгълния равнобедрен $\Delta ABC$ лежи в равнина α, върхът $B$ е на разстояние 6 cm от α, а хипотенузата $AB$ сключва с α ъгъл 30°. Двустенният ъгъл между равнината на триъгълника и α е:

А) 30°  Б) 45°  В) 60°  Г) 90°




Проверка на знания за обем на конус.

**4.** Обемът на конус с радиус $r=5$ и образуваща $l=13$ е равен на:

А) $90\pi$  Б) $100\pi$  В) $130\pi$  Г) $300\pi$

Проверка на знания за лице на повърхнина на цилиндър и сфера.

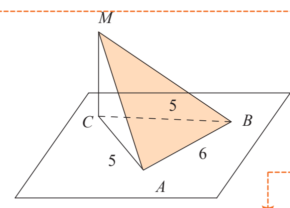
**5.** Цилиндър и сфера имат еднакви радиуси $r$. Ако лицата на повърхнините им също са равни, то отношението $h:r$ на височината на цилиндъра и радиуса му е:

А) $1:1$  Б) $2:1$  В) $1:2$  Г) $4:3$

**II част**

**6.** Основата на триъгълна пирамида $ABCM$ е $\Delta ABC$ със страни $AB=6$ cm и $AC=BC=5$ cm. Лицето на $\Delta ABM$ е $12\sqrt{5}$ cm², а ръбът $MC$ е перпендикулярен на равнината на основата. Намерете обема на пирамидата.

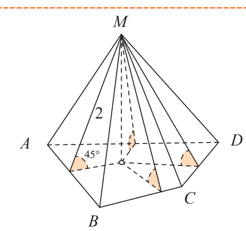
Проверка на знания за разстояние от точка до равнина.




Проверка на знания за намиране на обем на пирамида с основа описан четириъгълник.

**7.** Височината на четириъгълна пирамида е 2 cm, околните стени сключват с основата ъгъл 45°, а сборът от дължините на два срещуположни основни ръба е 10 cm. Намерете обема на пирамидата.

Проверка на знания за двустенен ъгъл.




**III част**

**8.** Ортогоналната проекция на върха $D$ на тетраедъра $ABCD$ върху равнината на основата е центърът $O$ на описаната около $\Delta ABC$ окръжност. Намерете ъглите, които околните ръбове сключват с $(ABC)$, ако е известно, че $\sphericalangle ACB=60°$ и $DO:AB=1:\sqrt{3}$.

Проверка на знания за намиране на ъгъл между права и равнина.

158

# ВАРИАНТИ ЗА ДИАГНОСТИКА НА РЕЗУЛТАТИ ОТ ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА В 10. КЛАС

# 1. НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР

## ВАРИАНТ 1

**I част**

**1.** В кутия има 6 зелени и $x$ червени топки. Намерете $x$, ако вероятността произволна избрана топка да е червена е $\frac{2}{5}$.

А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4

**2.** Изразът $\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}+\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ е равен на:

А) 3 Б) 4 В) 5 Г) 6

**3.** Решенията на неравенството $x^2 - 7x + 12 > 0$ са:

А) $x \in (-\infty, 3) \cup (4, \infty)$ Б) $x \in (-\infty, 3] \cup [4, \infty)$ В) $x \in (3, 4)$ Г) $x \in [3, 4]$

**4.** Ако $\cos\alpha = \frac{8}{17}$ и $\alpha \in (0°, 90°)$, намерете $\sin\alpha$.

А) $\frac{5}{13}$ Б) $\frac{9}{17}$ В) $\frac{15}{17}$ Г) $\frac{17}{25}$

**5.** Броят на решенията на системата $\left| \begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ xy + y^2 + 1 = 0 \end{array} \right.$ е равен на:

А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4

**II част**

**6.** В правоъгълен триъгълник $ABC$ е построена височината $CH$ към хипотенузата $AB$. Намерете лицето на триъгълник $ABC$, ако $AH = 5$ cm и $BC = 6$ cm.

**7.** Най-малката стойност на функцията $f(x) = ax^2 + 2x + 3$ е равна на 2. Намерете стойността на $a$.

**III част**

**8.** Намерете лицето на равнобедрен трапец $ABCD$ с малка основа $CD = 8$ cm, бедро $AD = 15$ cm и височина $h = 12$ cm.

# 1. НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР

## ВАРИАНТ 2

**I част**

**1.** В кутия има 8 зелени и $x$ червени топки. Намерете $x$, ако вероятността произволна избрана топка да е червена е $\frac{1}{5}$.

А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4

**2.** Изразът $\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ е равен на:

А) 3 Б) 4 В) 5 Г) 6

**3.** Решенията на неравенството $x^2 - 6x + 8 < 0$ са:

А) $x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$ Б) $x \in (-\infty, 2] \cup [4, \infty)$ В) $x \in (2, 4)$ Г) $x \in [2, 4]$

**4.** Ако $\sin\alpha = \frac{7}{25}$ и $\alpha \in (0°, 90°)$, намерете $\cos\alpha$.

А) $\frac{12}{25}$ Б) $\frac{8}{17}$ В) $\frac{15}{17}$ Г) $\frac{24}{25}$

**5.** Броят на решенията на системата $\begin{vmatrix} x^2 - xy = 0 \\ y^2 + y + x = -1 \end{vmatrix}$ е равен на:

А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4

**II част**

**6.** В правоъгълен триъгълник $ABC$ е построена височината $CH$ към хипотенузата $AB$. Намерете лицето на триъгълник $ABC$, ако $BH = AH + 5$ и $CH = 6$ cm.

**7.** Най-малката стойност на функцията $f(x) = ax^2 - 2x + 3$ е равна на 2. Намерете стойността на $a$.

**III част**

**8.** Намерете лицето на равнобедрен трапец $ABCD$ с малка основа $CD = 6$ cm, бедро $AD = 17$ cm и височина $h = 15$ cm.

# 2. ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ. ИРАЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ

## ВАРИАНТ 1

**I част**

**1.** Изразът $\sqrt{-\dfrac{1}{x-2}}$ НЯМА смисъл при:

А) $x<0$ Б) $x<2$ В) $x \geq 2$ Г) $x \in (0; 2)$

**2.** Числената стойност на израза $A=\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-6x+9}}$ за $x=-2$ е:

А) $-\dfrac{4}{25}$ Б) $-\dfrac{2}{5}$ В) $\dfrac{2}{5}$ Г) $\dfrac{4}{25}$

**3.** Решенията на уравнението $(x+1)^2\sqrt{x+2}=0$ са:

А) само $x=-2$ Б) само $x=-1$ В) $x=-2$ и $x=-1$ Г) $x \in (-\infty; \infty)$

**4.** Кое от уравненията НЯМА реални корени?

А) $\sqrt{-\dfrac{x+1}{2}}=\dfrac{x+1}{2}$ Б) $\sqrt{3-x}=-(3-x)$ В) $\sqrt{2x}=-4x$ Г) $\sqrt{x}=-3-x$

**5.** Дефиниционното множество на уравнението $\sqrt{x-3}-\sqrt{2-x}=12$ е:

А) $\varnothing$ Б) $[2; 3]$ В) $(2; 3)$ Г) $(-\infty; 3]$

**II част**

**6.** Намерете стойността на израза $P=\sqrt{(5-4x)^2}+(x-2)^2$ при $x=\sqrt{3}$.

**7.** Запишете множеството от решенията на уравнението $\sqrt{\dfrac{2-x}{x}}+2\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}=3$.

**III част**

**8.** Решете уравнението $\sqrt{\dfrac{x}{x-1}+20}-\sqrt{\dfrac{x}{x-1}-1}=\sqrt{3}$.

# 2. ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ. ИРАЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ

## ВАРИАНТ 2

**I част**

**1.** Изразът $\sqrt{-\frac{1}{x-5}}$ НЯМА смисъл при:

А) $x < 0$ Б) $x < 5$ В) $x \geq 5$ Г) $x \in (0; 5)$

**2.** Числената стойност на израза $A = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+6x-7}}$ за $x = 2$ е:

А) $-\frac{4}{9}$ Б) $-\frac{2}{3}$ В) $\frac{2}{3}$ Г) $\frac{4}{9}$

**3.** Решенията на уравнението $(x-5)^2\sqrt{2-x} = 0$ са:

А) само $x = 2$ Б) само $x = 5$ В) $x = 2$ и $x = 5$ Г) $x \in (-\infty; \infty)$

**4.** Кое от уравненията НЯМА реални корени?

А) $\sqrt{-\frac{x-3}{4}} = \frac{x-3}{4}$ Б) $\sqrt{4-x} = -(4-x)$ В) $\sqrt{7x} = -7x$ Г) $\sqrt{x} = -9-x$

**5.** Дефиниционното множество на уравнението $\sqrt{x-7} - \sqrt{8-x} = -2$ е:

А) $\varnothing$ Б) $[7, 8]$ В) $(7; 8)$ Г) $(-\infty; 8]$

**II част**

**6.** Намерете стойността на израза $P = \sqrt{\left(x-\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{3}-x\right)^2}$ при $x = 2$.

**7.** Запишете множеството от решенията на уравнението $\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} = 3$.

**III част**

**8.** Решете уравнението $\sqrt{\frac{2x}{1-x} + 20} - \sqrt{3} = \sqrt{\frac{2x}{1-x} - 1}$.

# 3. ПРОГРЕСИИ

## ВАРИАНТ 1

**I част**

**1.** Седмият член на геометрична прогресия, за която $a_1 = 64$ и $a_5 = 4$ е равен на:

А) $\frac{1}{4}$ Б) $\frac{1}{2}$ В) 1 Г) 4

**2.** Разликата на аритметична прогресия, за която $a_1 = 4$ и $a_{10} = –86$ е равна на:

А) –7 Б) –8 В) –9 Г) –10

**3.** Влог се олихвява 4 години при проста лихва от 3%. Намерете големината на влога, ако той е нараснал с 1800 лева.

А) 15 000 лева Б) 16 000 лева В) 18 000 лева Г) 22 000 лева

**4.** Сборът $2 + 5 + 8 + \ldots + 32$ е равен на:

А) 130 Б) 144 В) 170 Г) 187

**5.** Сборът от първите 8 члена на геометрична прогресия с първи член $a_1 = 3$ и частно $q = –2$ е равен на:

А) 765 Б) –768 В) 510 Г) –255

**II част**

**6.** Намерете числата $a$ и $c$, ако $a$, 8 и $c$ образуват аритметична прогресия, а $a$, 8 и $c + a$ образуват геометрична прогресия.

**7.** Банка олихвява влогове с проста лихва от $x$%. За три години лихвата по влога е равна на лихвата на два пъти по-голям влог за една година при лихва от $(x +1,5)$%. Намерете $x$.

**III част**

**8.** Намерете частното $q$ на геометрична прогресия $a$, $b$, $c$, ако числата $11a$, $c$, $a + b + c$ образуват аритметична прогресия.

# 3. ПРОГРЕСИИ

## ВАРИАНТ 2

**I част**

**1.** Осмият член на геометрична прогресия, за която $a_2 = 3$ и $a_5 = 24$ е равен на:

А) 96 Б) 192 В) 384 Г) 156

**2.** Разликата на аритметична прогресия, за която $a_1 = -2$ и $a_9 = 70$ е равна на:

А) 7 Б) 8 В) 9 Г) 10

**3.** Влог от 20 000 лева се олихвява при проста лихва от 3,5%. След колко години влогът ще стане 23 500 лева?

А) 3 години Б) 4 години В) 5 години Г) 6 години

**4.** Сборът $2 + 6 + 10 + 14 + \ldots + 30$ е равен на:

А) 128 Б) 144 В) 160 Г) 180

**5.** Сборът от първите 8 члена на геометрична прогресия с първи член $a_1 = -3$ и частно $q = 2$ е равен на:

А) –765 Б) 768 В) 510 Г) –381

**II част**

**6.** Намерете числата $a$ и $c$, ако $a$, 12 и $c$ образуват аритметична прогресия, а $a + c$, 12 и $c$ образуват геометрична прогресия.

**7.** Банка олихвява влогове с проста лихва от $x$%. За четири години лихвата по влога е равна на лихвата на три пъти по-голям влог за една година при лихва от $(x + 1)$%. Намерете $x$.

**III част**

**8.** Намерете частното $q$ на геометрична прогресия $a$, $b$, $c$, ако числата $5a$, $c$, $a + b + c$ образуват аритметична прогресия.

# 5. РЕШАВАНЕ НА ТРИЪГЪЛНИК

## ВАРИАНТ 1

**I част**

**1.** Стойността на израза sin30° – cos150° + tg45° + cotg150° е:

А) $3+\sqrt{3}$ Б) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ В) $3-\sqrt{3}$ Г) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

**2.** Стойността на израза $\sin^2 15° + \sin^2 75° + tg5°.tg85°$ е:

А) 0 Б) $\frac{1}{2}$ В) 1 Г) 2

**3.** Равнобедреният $\Delta ABC$ с основа $AB$ = 12 cm и $tg\sphericalangle A = \frac{3}{4}$ има лице:

А) 18 $cm^2$ Б) 21,6 $cm^2$ В) 27 $cm^2$ Г) 28 $cm^2$

**4.** Даден е правоъгълен триъгълник с хипотенуза 10 cm и лице 24 $cm^2$. Радиусът на вписаната в този триъгълник окръжност е:

А) 1 cm Б) $\sqrt{2}$ cm В) $\sqrt{3}$ cm Г) 2 cm

**5.** Триъгълникът $ABC$ е със страни $BC$ = 8 cm, $AC$ = 16 cm и $AB = 8\sqrt{7}$ cm. Дължината на медиана към най-малката страна е:

А) $2\sqrt{3}$ Б) $4\sqrt{21}$ В) $2\sqrt{21}$ Г) $4\sqrt{3}$

**II част**

**6.** Ако $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in (90°; 180°)$, намерете стойността на израза $A = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$ .

**7.** Даден е $\Delta ABC$, в който $AC$ = 2 cm, $BC$ = 4 cm и $\sphericalangle ACB$ = 120°. Намерете дължината на ъглополовящата $CL$ ($L \in AB$).

**III част**

**8.** В остроъгълния $\Delta ABC$ медианата $AM$ ($M \in BC$) и височината $CH$ ($H \in AB$) са съответно равни на $6\sqrt{5}$ cm и 12 cm. Ако страната $BC$ = 20 cm, намерете дължината на радиуса на описаната около $\Delta ABC$ окръжност.

# 5. РЕШАВАНЕ НА ТРИЪГЪЛНИК

## ВАРИАНТ 2

**I част**

**1.** Стойността на израза sin45° + cos135° – tg0° + cotg120° е:

А) 0 Б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ В) $-\frac{1}{2}$ Г) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

**2.** Стойността на израза $-\frac{\sin^2 20° + \sin^2 70° + \text{tg}\,28°.\text{tg}\,62°}{4}$ е:

А) –1 Б) $\frac{1}{2}$ В) $-\frac{1}{2}$ Г) 1

**3.** Равнобедреният $\Delta ABC$ с основа $AB$ = 16 cm и $\text{cotg}\sphericalangle A = \frac{4}{3}$ има лице:

А) 48 cm² Б) 24 cm² В) 21,3 cm² Г) 12 cm²

**4.** Даден е правоъгълен триъгълник с хипотенуза 20 cm и лице 96 cm². Радиусът на вписаната в този триъгълник окръжност е:

А) 1 cm Б) $2\sqrt{2}$ cm В) $2\sqrt{3}$ cm Г) 4 cm

**5.** Триъгълникът $ABC$ е със страни $BC$ = 4 cm, $AC$ = 8 cm и $AB = 4\sqrt{7}$ cm. Дължината на медиана към най-малката страна е:

А) $2\sqrt{3}$ Б) $4\sqrt{3}$ В) $2\sqrt{21}$ Г) $4\sqrt{21}$

**II част**

**6.** Ако $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in (0°; 90°)$, намерете стойността на израза $A = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$ .

**7.** Триъгълникът $ABC$ е със страни $BC$ = 8 cm, $AC$ = 8 cm и $AB$ = 4 cm. Намерете дължината на ъглополовящата $AL$ ($L \in BC$).

**III част**

**8.** В $\Delta ABC$ със страна $AB = \sqrt{10}$ cm точката $O$ е центърът на вписаната окръжност, $AO$ = 2 cm и $BO = \sqrt{2}$ cm. Намерете лицето на $\Delta ABC$.

# 6. ЕЛЕМЕНТИ ОТ СТЕРЕОМЕТРИЯТА

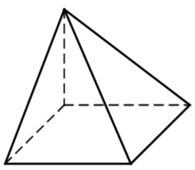
## ВАРИАНТ 1

**I част**

**1.** Всяка от правите $a$ и $b$ пресича две кръстосани прави. Кое от твърденията е възможно?
(1) $a$ и $b$ са успоредни; (2) $a$ и $b$ са пресекателни; (3) $a$ и $b$ са кръстосани.

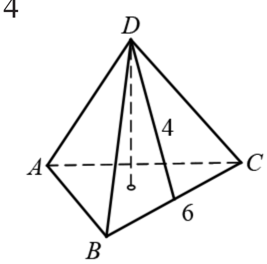
А) само (1) Б) само (2) В) само (3) Г) (2) и (3)

**2.** Основата на пирамида е ромб, а ортогоналната проекция на върха на пирамидата е един от върховете на ромба. Околните стени са:



А) равнобедрени триъгълници
Б) равностранни триъгълници
В) правоъгълни триъгълници
Г) два правоъгълни и два неправоъгълни триъгълника

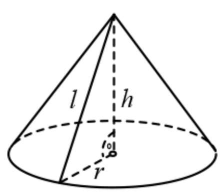
**3.** Основният ръб и апотемата на правилна триъгълна пирамида са съответно 6 cm и 4 cm. Височината на пирамидата е:




А) 5 cm Б) $\sqrt{13}$ cm
В) $2\sqrt{3}$ cm Г) 3 cm

**4.** Лицето на повърхнината на конус с радиус $r = 5$ и образуваща $l = 13$ е:

А) $30\pi$ Б) $65\pi$
В) $90\pi$ Г) $100\pi$

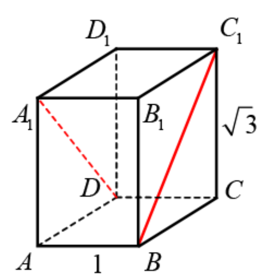



**5.** Цилиндър и сфера имат еднакви радиуси $r$. Ако обемите им също са равни, то отношението $h : r$ на височината на цилиндъра и радиуса му е:

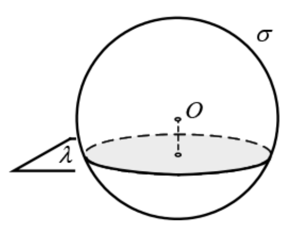
А) 3 : 4 Б) 1: 1 В) 4 : 3 Г) 4 : 1

**II част**

**6.** Дадена е правилна четириъгълна призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основен ръб $AB = 1$ и околен ръб $CC_1 = \sqrt{3}$. Намерете синуса на ъгъла между правите $BC_1$ и $A_1D$.




**7.** Лицето на повърхнината на сфера $\sigma$ с център $O$ е $25\pi$ cm$^2$. Построена е равнина $\lambda$, която е на разстояние 2 cm от $O$. Намерете лицето на сечението на $\lambda$ и $\sigma$.




**III част**

**8.** Дадена е правилна триъгълна пирамида с основен ръб $a = 6$ cm и околен ръб $l = 4$ cm. Намерете височината и апотемата на пирамидата.

# 6. ЕЛЕМЕНТИ ОТ СТЕРЕОМЕТРИЯТА

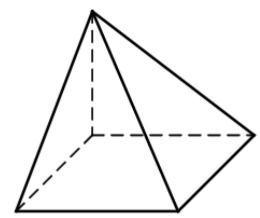
## ВАРИАНТ 2

**I част**

**1.** Правите $a$ и $b$ са перпендикулярни на правата $m$. Кое от твърденията (1), (2) и (3) е НЕВЪЗМОЖНО?
(1) $a$ и $b$ са успоредни; (2) $a$ и $b$ са пресекателни; (3) $a$ и $b$ са кръстосани.

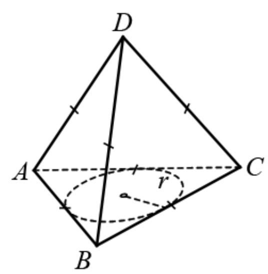
А) само (1) Б) само (2) В) само (3)
Г) и трите твърдения са възможни

**2.** Основата на пирамида е правоъгълник, а върхът на пирамидата се проектира ортогонално във връх на правоъгълника. Околните стени са:



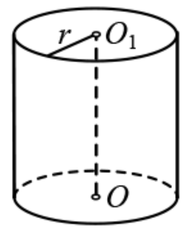
А) правоъгълни триъгълници
Б) равнобедрени триъгълници
В) равностранни триъгълници
Г) два правоъгълни и два неправоъгълни триъгълника

**3.** Всички ръбове на тетраедър са равни, а $r$ е радиусът на вписаната в негова стена окръжност. Лицето на повърхнината на тетраедъра е:




А) $12r^2\sqrt{3}$ Б) $9r^2\sqrt{3}$
В) $6r^2\sqrt{3}$ Г) $3r^2\sqrt{3}$

**4.** Лицето на повърхнината на прав кръгов цилиндър с радиус $r = 5$ и образуваща $OO_1 = 12$ е:



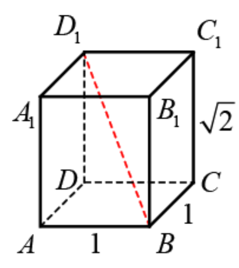

А) $100\pi$ Б) $300\pi$
В) $325\pi$ Г) $350\pi$

**5.** Конус и кълбо имат еднакви радиуси $r$. Ако обемите им също са равни, то отношението $h : r$ на височината на конуса и радиуса му е:

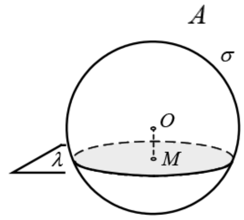
А) 1 : 4 Б) 1 : 1 В) 4 : 3 Г) 4 : 1

**II част**

**6.** Дадена е правилна четириъгълна призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основен ръб $AB = 1$ и околен ръб $CC_1 = \sqrt{2}$. Намерете синуса на ъгъла, който диагоналът $BD_1$ сключва със стената $ADD_1A_1$.




**7.** Лицето на повърхнината на сфера σ с център $O$ е $36\pi$ cm². През точка $M$, вътрешна за σ, е построена равнина λ, перпендикулярна на $MO$. Ако лицето на сечението на σ и λ е $4\pi$ cm², намерете дължината на отсечката $MO$.




**III част**

**8.** Дадена е правилна четириъгълна пирамида с височина $h = 3$ cm и ъгъл $\varphi = 60°$ между околна стена и основата. Намерете основния и околния ръб на пирамидата.

# 7. ГОДИШЕН ПРЕГОВОР

## ВАРИАНТ 1

**I част**

**1.** Колко корена има уравнението $\sqrt{8-7x}=3x-4$?

А) 0 Б) 1 В) 2 Г) безброй

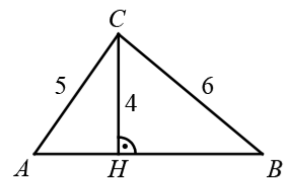
**2.** Дадена е аритметична прогресия с първи член $a_1 = 2$ и разлика $d = 3$. Сумата на първите 20 члена с нечетни номера е равна на:

А) 59 Б) 116 В) 610 Г) 1180

**3.** Към реда 1, 2, 6, 8, 11, 21 е добавено ново число. Намерете средното аритметично на данните от новия ред, ако е известно, че двата реда имат една и съща медиана.

А) 7 Б) $\dfrac{49}{6}$ В) 8 Г) 9

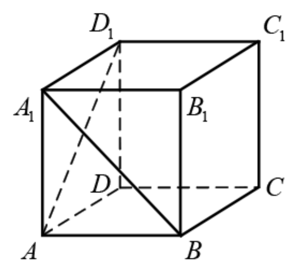
**4.** На чертежа $\Delta ABC$ е страни $AC = 5$ cm и $BC = 6$ cm, а отсечката $CH = 4$ cm ($H \in AB$) е височина. Радиусът на описаната около $\Delta ABC$ окръжност е:




А) $\dfrac{15}{8}$ Б) $\dfrac{15}{4}$ cm

В) $\dfrac{15}{2}$ cm Г) 2 cm

**5.** В куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ синусът на ъгъла между правите $AD_1$ и $A_1B$ е равен на:




А) $\dfrac{1}{2}$ Б) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

В) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Г) 1

**II част**

**6.** Частното на геометрична прогресия е $q = -2$, а сумата на първите три члена е $S_3 = 63$. Намерете сумата на първите осем члена на прогресията.

**7.** В равнобедрения $\Delta ABC$ точката $D$ е средата на основата $AB$, $AL$ ($L \in BC$) е ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$, а $O$ е центърът на вписаната окръжност. Намерете отношението $CO : CD$, ако е известно, че $CL : LB = 4 : 3$.

**III** част

**8.** В $\Delta ABC$ $AB = 8$, $AC = 15$ и $\sphericalangle BAC = 60°$. Намерете височината $AH$ ($H \in BC$) на триъгълника.

# 7. ГОДИШЕН ПРЕГОВОР

## ВАРИАНТ 2

**I част**

**1.** Колко корена има уравнението $\sqrt{x^2-8x+16}=4-x$?

А) 0 Б) 1 В) 2 Г) безброй

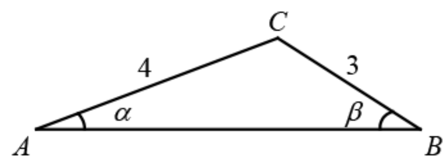
**2.** Частното на геометрична прогресия, за която $S_6 = 9S_3$, е равно на:

А) $\frac{1}{2}$ Б) $\frac{1}{3}$ В) 2 Г) 3

**3.** Към реда 1, 2, 6, 7, 7, 8, 11 е добавено число така, че двата реда имат една и съща средноаритметична стойност. Медианата на новия ред е:

А) 5,5 Б) 6 В) 6,5 Г) 7

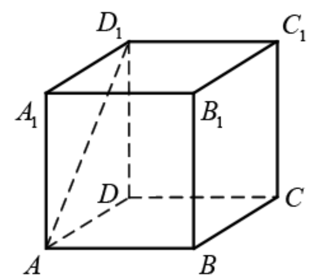
**4.** Намерете дължината на страната $AB$ на $\Delta ABC$, ако $BC = 3$ cm, $AC = 4$ cm и $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$.




А) $\sqrt{17}$ cm Б) 5 cm

В) $\sqrt{33}$ cm Г) 6 cm

**5.** В куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ косинусът на ъгъла между правите $AD_1$ и $BC$ е равен на:




А) 0 Б) $\frac{1}{2}$

В) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**II част**

**6.** За членовете на числовата редица $(a_n)$ са в сила равенствата $a_1 = 2$ и $a_n = a_{n-1} + 3$ за всяко $n \geq 2$. Пресметнете сумата $S = a_{11} + a_{12} + ... + a_{29} + a_{30}$.

**7.** Даден е $\Delta ABC$ със страни $AC = 5$, $BC = 4$ и $\sphericalangle ACB = 2\sphericalangle BAC$. Намерете дължината на ъглополовящата $CL$ ($L \in AB$) на $\sphericalangle ACB$.

**III част**

**8.** Точките $M$ и $N$ лежат на страните $AC$ и $BC$ на $\Delta ABC$, като $AM = 2CM$, $CN = 2BN$ и $S_{MNC} = 14$ cm$^2$. Намерете лицето на $\Delta ABC$.

# ПРИМЕРНА КЛАСНА РАБОТА – I СРОК

## ВАРИАНТ 1

**I част**

**1.** Стойността на израза $\cos\frac{3\alpha}{2} - 4\sin\alpha + \sqrt{3}.\text{cotg}\,2\alpha + \text{tg}\frac{3\alpha}{4}$ при α = 60° е:

А) $-2\sqrt{3}$ Б) –1 В) 1 Г) $2\sqrt{3}$

**2.** Ако α ∈ (90°; 180°) и $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, то стойността на cosα е:

А) $-\frac{5}{13}$ Б) 1 В) $\frac{5}{13}$ Г) $-\frac{2}{13}$

**3.** Разликата $d$ на аритметична прогресия с първи член $a_1 = 1$ и сбор на първите 10 члена $S_{10} = 145$ е равна на:

А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 5

**4.** Първият член $a_1$ на геометрична прогресия с частно $q = 3$ и сбор на първите 5 члена $S_5 = 242$ е равен на:

А) $\frac{1}{2}$ Б) 2 В) 2,6 Г) 4

**5.** За една година влог от 4500 лева нараства с 225 лева. Лихвеният процент на този влог е равен на:

А) 2,5% Б) 3% В) 3,5% Г) 4,5%

**II част**

**6.** Каква сума трябва да се внесе в банка при сложна лихва с лихвен процент 2%, ако след две години влогът трябва да е нараснал с 404 лева?

**7.** Решете уравнението $\sqrt{2(x-2)} - \sqrt{x+5} = 1$ .

**III част**

**8.** Намерете първият член и разликата на аритметична прогресия, за която $a_6 = 30$ и $a_2$, $a_4$ и $a_8$ образуват геометрична прогресия.

# ПРИМЕРНА КЛАСНА РАБОТА – I СРОК

## ВАРИАНТ 2

**I част**

**1.** Стойността на израза $\sqrt{3}\sin\frac{3\alpha}{2}-\sqrt{2}\cos\alpha+\sqrt{3}.\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{cotg}\frac{3\alpha}{2}$ при $\alpha = 30°$ е:

А) $-\sqrt{6}$ Б) $-\sqrt{6}+2$ В) 0 Г) 2

**2.** Ако $\alpha\in(90°;\,180°)$ и $\sin\alpha=\frac{8}{17}$, то стойността на cosα е:

А) $\frac{15}{17}$ Б) 1 В) $-\frac{15}{17}$ Г) $-\frac{8}{17}$

**3.** Разликата $d$ на аритметична прогресия с първи член $a_1 = 3$ и сбор на първите 10 члена $S_{10} = 120$ е равна на:

А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 5

**4.** Първият член $a_1$ на геометрична прогресия с частно $q = 2$ и сбор на първите 5 члена $S_5 = 128$ е равен на:

А) $\frac{1}{2}$ Б) 2 В) 2,6 Г) 4

**5.** За една година влог от 3600 лева нараства със 126 лева. Лихвеният процент на този влог е равен на:

А) 2,5% Б) 3% В) 3,5% Г) 4%

**II част**

**6.** Каква сума трябва да се внесе в банка при сложна лихва с лихвен процент 3% , ако след две години влогът трябва да е нараснал с 609 лева?

**7.** Решете уравнението $x^2+2x+\sqrt{2x^2+4x+3}=6$.

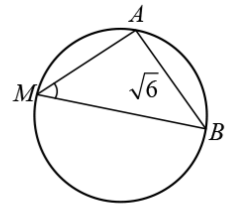
**III част**

**8.** Намерете първият член и разликата на аритметична прогресия, за която $a_5 = 25$ и $a_1$, $a_3$ и $a_9$ образуват геометрична прогресия.

# ПРИМЕРНА КЛАСНА РАБОТА – II СРОК

### ВАРИАНТ 1

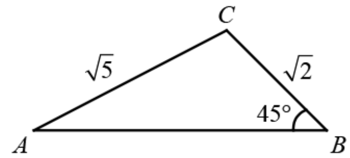
**I част**




**1.** В окръжност с радиус $R = \sqrt{3}$ cm е построена хорда $AB = \sqrt{6}$ cm, а $M$ е произволна точка от по-голямата дъга $\overset{\frown}{AB}$. Мярката на $\sphericalangle AMB$:

А) е 30°　　Б) е 45°

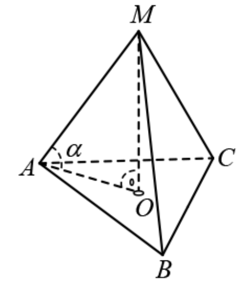
В) е 60°　　Г) не може да се определи




**2.** Лицето на $\Delta ABC$ със страни $AC = \sqrt{5}$ cm, $BC = \sqrt{2}$ cm и $\sphericalangle AMB = 45°$ е равно на:

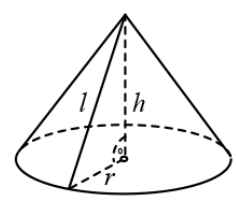
А) 0,5 cm$^2$　　Б) 1 cm$^2$

В) 1, 5 cm$^2$　　Г) 2 cm$^2$




**3.** Околният ръб $AM$ на правилна триъгълна пирамида $ABCM$ е два пъти по-голям от основния ръб $AB$ и сключва с основата ъгъл α, чийто косинус е равен на:

А) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　Б) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　В) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　Г) $\dfrac{1}{4}$




**4.** Лицето на основата на прав кръгов конус е 9π cm$^2$, а лицето на околната повърхнина е 15π cm$^2$. Дължината на височината на конуса е:

А) 3 cm　　Б) 4 cm

В) 5 cm　　Г) $4\sqrt{2}$ cm

**5.** Обемът на кълбо е 36π cm$^3$ и е равен на обема на цилиндър, чиято височина е равна на радиуса на кълбото. Лицето на околната повърхнина на цилиндъра е:

А) 6π cm$^2$　　Б) $6\pi\sqrt{3}$ cm$^2$　　В) 12π cm$^2$　　Г) $12\pi\sqrt{3}$ cm$^2$

**II част**

**6.** В $\Delta ABC$ със страни $AB = 2$ cm, $AC = 3$ cm и $\sphericalangle BAC = 60°$ намерете дължината на медианата $AM$ ($M \in BC$).

**7.** Дължините на ръбовете на правоъгълен паралелепипед са в отношение 1 : 3 : 4, а най-голямата по площ стена е с 36 cm$^2$ по-голяма от тази на стената с най-малка площ. Намерете обема на паралелепипеда.

**III част**

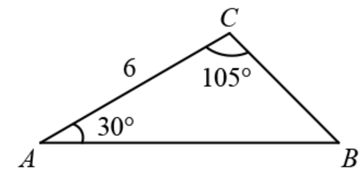
**8.** Основата на тетраедър $ABCD$ е равностранен $\Delta ABC$, а стената $ABD$ е перпендикулярна на равнината на основата. Намерете обема на тетраедъра, ако $AD = 5$ cm, $BD = 8$ cm и $\sphericalangle ADB = 60°$.

# ПРИМЕРНА КЛАСНА РАБОТА – II СРОК

## ВАРИАНТ 2

**I част**

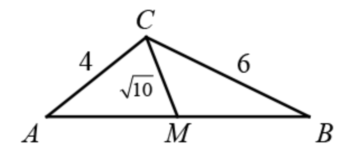
**1.** В $\Delta ABC$ с $\sphericalangle A = 30°$, $\sphericalangle C = 105°$ и $AC = 6$ cm дължината на страната $BC$ е:




А) 2 cm　　　Б) $2\sqrt{2}$ cm

В) 3 cm　　　Г) $3\sqrt{2}$ cm

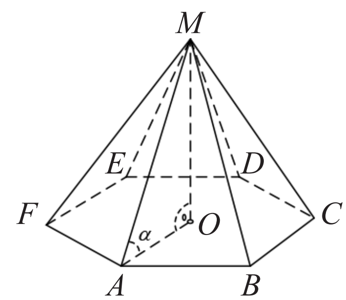
**2.** В $\Delta ABC$ със страни $AC = 4$ cm и $BC = 6$ cm отсечката $CM = \sqrt{10}$ cm е медиана. Дължината на страната $AB$ е:




А) 7 cm　　　Б) 8 cm

В) 9 cm　　　Г) $3\sqrt{10}$ cm

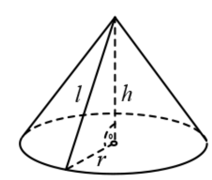
**3.** Околният ръб $AM$ на правилна шестоъгълна пирамида $ABCDEFM$ е два пъти по-голям от основния ръб AB и сключва с основата ъгъл $\alpha$ с мярка:




А) 30°　　　Б) 45°

В) 60°　　　Г) 90°

**4.** Лицето на основата на прав кръгов конус е $16\pi$ cm$^2$, а лицето на околната повърхнина е $20\pi$ cm$^2$. Обемът на конуса е:



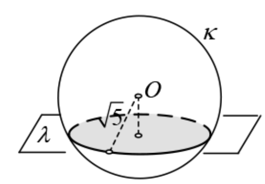

А) $12\pi$ cm$^3$　　　Б) $16\pi$ cm$^3$

В) $36\pi$ cm$^3$　　　Г) $48\pi$ cm$^3$

**5.** Кълбо $k$ с радиус $R = \sqrt{5}$ cm и център $O$ е пресечено с равнина $\lambda$. Лицето на полученото сечение е $\pi$ cm$^2$. Разстоянието от $O$ до $\lambda$ е:

А) 1 cm　　　Б) 2 cm

В) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ cm　　　Г) $\sqrt{6}$ cm




**II част**

**6.** В $\Delta ABC$ със страни $AB = 6$ cm, $BC = 7$ cm и $CA = 8$ cm намерете дължината на ъглополовящата $AL$ ($L \in BC$).

**7.** Обемът на правилна четириъгълна призма е 12 cm$^3$, а лицето на околната ѝ повърхнина е 24 cm$^2$. Намерете дължината на диагонала на призмата.

**III част**

**8.** Основата на права призма $ABCA_1B_1C_1$ е тъпоъгълен $\Delta ABC$ със страни $AB = 8$ cm, $BC = 7$ cm и $\sphericalangle A = 60°$. Намерете обема на призмата, ако лицето на околната ѝ повърхнина е 180 cm$^2$.

# ОТГОВОРИ НА ВАРИАНТИТЕ ЗА ДИАГНОСТИКА НА РЕЗУЛТАТИТЕ ОТ ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА ЗА 10. КЛАС

## 1. НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР

**Вариант 1**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Г | Б | А | В | В | $S=9\sqrt{5}$ cm$^2$ | $a=1$ | $S=204$ cm$^2$ |

**8.** Нека $DH$ е височината на трапеца. От правоъгълния $\Delta AHD$ получаваме $AH^2 = AD^2 - DH^2 = 81$ т.е. $AH = 9$. Тъй като $AH = \dfrac{AB-CD}{2}$, намираме $AB = 2AH + CD = 26$. За лицето на трапеца пресмятаме:
$S = \dfrac{AB+CD}{2}.h = \dfrac{26+8}{2}.12 = 17.12 = 204$ cm$^2$.

**Вариант 2**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Б | Г | В | Г | А | $S=39$ cm$^2$ | $a=1$ | $S=210$ cm$^2$ |

**8.** Нека $DH$ е височината на трапеца. От правоъгълния $\Delta AHD$ получаваме $AH^2 = AD^2 - DH^2 = 64$ т.е. АН = 8. Тъй като $AH = \dfrac{AB-CD}{2}$, намираме $AB = 2AH + CD = 22$. За лицето на трапеца пресмятаме:
$S = \dfrac{AB+CD}{2}.h = \dfrac{22+6}{2}.15 = 14.15 = 210$ cm$^2$.

## 2. ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ. ИРАЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ

**Вариант 1**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| В | В | В | Г | А | $P=2$ | $\left\{1; \dfrac{2}{5}\right\}$ | $x=\dfrac{28}{27}$ |

**8.** Да положим $\dfrac{x}{x-1} = y$. Тогава $\sqrt{\dfrac{x}{x-1}+20} - \sqrt{\dfrac{x}{x-1}-1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{y+20} - \sqrt{y-1} = \sqrt{3}$. Дефиниционното множество на уравнението е $y \in [1; \infty)$ и се определя от решенията на системата $\left| \begin{array}{l} y+20 \geq 0 \\ y-1 \geq 0. \end{array} \right.$

Тогава $\sqrt{y+20} - \sqrt{y-1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{y+20}}_{+} = \underbrace{\sqrt{3}+\sqrt{y-1}}_{+} \Leftrightarrow \cancel{y} + 20 = 3 + 2.\sqrt{3}.\sqrt{y-1} + \cancel{y} - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3(y-1)} = 18 \Leftrightarrow \sqrt{3(y-1)} = 9 \Leftrightarrow 3(y-1) = 81 \Leftrightarrow 3y = 84 \Leftrightarrow y = 28 \in DM$.

Следователно уравнението има единствено решение $y = 28$. След връщане в полагането получаваме $\dfrac{x}{x-1} = y \Leftrightarrow \dfrac{x}{x-1} = 28 \Leftrightarrow 27x = 28 \Leftrightarrow x = \dfrac{28}{27}$.

**Вариант 2**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| В | В | А | Г | Б | $P=4-2\sqrt{3}$ | $\left\{\dfrac{4}{3}\right\}$ | $x=\dfrac{14}{15}$ |

**8.** Да положим $\frac{2x}{1-x}=y$. Тогава $\sqrt{\frac{2x}{1-x}+20}-\sqrt{3}=\sqrt{\frac{2x}{1-x}-1} \Leftrightarrow \sqrt{y+20}-\sqrt{y-1}=\sqrt{3}$. Дефиниционното множество на уравнението е $y\in[1;\,\infty)$ и се определя от решенията на системата $\left|\begin{array}{l} y+20\geq 0 \\ y-1\geq 0. \end{array}\right.$

Тогава $\sqrt{y+20}-\sqrt{y-1}=\sqrt{3} \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{y+20}}_{+}=\underbrace{\sqrt{3}+\sqrt{y-1}}_{+} \Leftrightarrow \cancel{y}+20=3+2.\sqrt{3}.\sqrt{y-1}+\cancel{y}-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3(y-1)}=18 \Leftrightarrow \sqrt{3(y-1)}=9 \Leftrightarrow 3(y-1)=81 \Leftrightarrow 3y=84 \Leftrightarrow y=28\in DM.$

Следователно уравнението има единствено решение $y=28$. След връщане в полагането получаваме $\frac{2x}{1-x}=y \Leftrightarrow \frac{2x}{1-x}=28 \Leftrightarrow 30x=28 \Leftrightarrow x=\frac{14}{15}$.

## 3. ПРОГРЕСИИ

**Вариант 1**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| В | Г | А | Г | Г | $a=4$, $c=12$ | $x=3$ | $q=-3;\,4$ |

**8.** Тъй като $11a$, $c$, $a+b+c$ образуват аритметична прогресия, то $2c=11a+a+b+c$.

От това равенство получаваме $c-12a-b=0$.

От друга страна $b=a.q$ и $c=a.q^2$ и след заместване и съкращаване на $a$, намираме $q^2-q-12=0$.

Корените на това квадратно уравнение са $q=-3;\,4$.

**Вариант 2**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Б | В | В | А | А | $a=18$, $c=6$ | $x=3$ | $q=-2;\,3$ |

**8.** Тъй като $5a$, $c$, $a+b+c$ образуват аритметична прогресия, то $2c=5a+a+b+c$.

От това равенство получаваме $c-6a-b=0$.

От друга страна $b=a.q$ и $c=a.q^2$ и след заместване и съкращаване на $a$, намираме $q^2-q-6=0$.

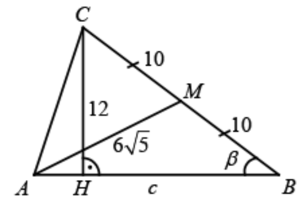
Корените на това квадратно уравнение са $q=-2;\,3$.

## 5. РЕШАВАНЕ НА ТРИЪГЪЛНИК

**Вариант 1**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Г | Г | В | Г | Б | $A=-\frac{1}{7}$ | $CL=\frac{4}{3}$ | $R=\frac{10\sqrt{10}}{3}$ cm |

**8.** Означаваме $AB = c$ и $\sphericalangle ABC = \beta$. В правоъгълния $\Delta BHC$:




$BH^2 = BC^2 - CH^2 = 20^2 - 12^2 = 32.8 = 16^2$, $BH = 16$ cm, $\sin\beta = \dfrac{CH}{BC} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$ и $\cos\beta = \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{16}{20} = \dfrac{4}{5}$. Прилагаме косинусовата теорема за страната $AM$ в $\Delta ABM$:

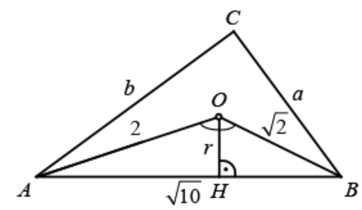
$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\cos\beta \Leftrightarrow 36.5 = c^2 + 100 - 2c.10.\frac{4}{5} \Leftrightarrow c^2 - 16c - 80 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow c_1 = 20$, $c_2 = -4$, като решение е $c = 20$. От $AB = 20$ cm и $BH = 16$ cm намираме $AH = 4$ cm. Тогава в правоъгълния $\Delta AHC$ $AC^2 = AH^2 + CH^2 = 16 + 144 = 160$ и $AC = 4\sqrt{10}$ cm. От синусовата теорема за $\Delta ABC$ следва, че $\dfrac{AC}{\sin\beta} = 2R$ и $R = \dfrac{AC}{2\sin\beta} = \dfrac{4\sqrt{10}}{2.\frac{3}{5}} = \dfrac{10\sqrt{10}}{3}$ cm.

**Вариант 2**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Г | В | А | Г | В | $A = -7$ | $AL = \dfrac{4\sqrt{10}}{3}$ | $S_{ABC} = \dfrac{12}{5}$ cm$^2$ |

**8.** От косинусовата теорема за $\Delta AOB$ следва, че:




$$\cos\sphericalangle AOB = \frac{AO^2 + BO^2 - AB^2}{2AO.BO} = \frac{4+2-10}{2.2.\sqrt{2}} = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } \sphericalangle AOB = 135°.$$

Построяваме $OH \perp AB$ ($OH = r$ е радиусът на вписаната окръжност).

От $S_{AOB} = \dfrac{1}{2}AO.BO.\sin 135° = \dfrac{1}{2}.2.\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$ и $S_{AOB} = \dfrac{1}{2}AB.OH = \dfrac{\sqrt{10}}{2}r$ следва, че $r = \dfrac{2}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$ cm.

Точката $O$ е центърът на вписаната окръжност, $AO$ и $BO$ са ъглополовящи на $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle ABC$. Тогава

$$\sphericalangle AOB = 90° + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB \Leftrightarrow 135° = 90° + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sphericalangle ACB = 45° \text{ и } \sphericalangle ACB = 90°.$$

Означаваме $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$. От $r = \dfrac{a+b-c}{2}$ намираме $a + b = 2r + c = \dfrac{2\sqrt{10}}{5} + \sqrt{10} = \dfrac{7\sqrt{10}}{5}$ cm.

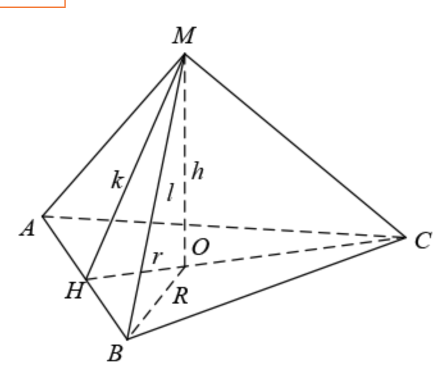
Тогава $S_{ABC} = pr = \dfrac{1}{2}(a+b+c)r = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{7\sqrt{10}}{5} + \sqrt{10}\right)\dfrac{\sqrt{10}}{5} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{12\sqrt{10}}{5}.\dfrac{\sqrt{10}}{5} = \dfrac{12}{5}$ cm$^2$.

## 6. ЕЛЕМЕНТИ ОТ СТЕРЕОМЕТРИЯТА

**Вариант 1**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| В | Г | Б | В | В | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | $\dfrac{9\pi}{4} = 2,25\pi$ cm$^2$ | $k = \sqrt{7}$ cm; $h = 2$ cm |

**8.** Нека $ABCM$ е правилна триъгълна пирамида с основа равностранния $\Delta ABC$, основен ръб $AB = a$, околен ръб $BM = l$, височина $MO = h$ и апотема $MH = k$.




За радиусите $R$ на описаната и $r$ на вписаната окръжности за $\Delta ABC$ имаме съответно:

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm и } r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} \text{ cm}.$$

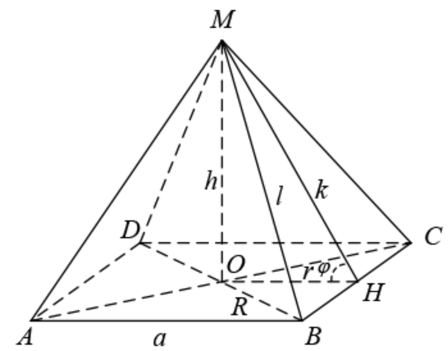
От правоъгълните триъгълници $BHM$ и $BOM$ намираме:

$MH^2 = BM^2 - BH^2 \Leftrightarrow k^2 = l^2 - \frac{a^2}{4} = 16 - 9 = 7$, откъдето получаваме $k = \sqrt{7}$ cm;

$MO^2 = BM^2 - BO^2 \Leftrightarrow h^2 = l^2 - R^2 \Leftrightarrow h^2 = 16 - \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 16 - 12 = 4$ и $h = 2$ cm.

**Вариант 2**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Г | А | А | Г | Г | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{5}$ cm | $a = 2\sqrt{3}$ cm; $l = \sqrt{15}$ cm |




**8.** Нека $ABCDM$ е правилна четириъгълна пирамида с основа квадрата $ABCD$, основен ръб $AB = a$, околен ръб $BM = l$ и височина $MO = h$. Означаваме с $H$ – средата на $BC$.

За радиусите $R$ на описаната и $r$ на вписаната окръжности за $ABCD$ имаме съответно $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ и $r = \frac{a}{2}$.

От правоъгълните триъгълници $HOM$ и $BOM$ намираме:

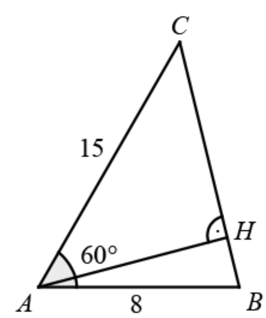
$\frac{OH}{OM} = \operatorname{cotg}\varphi \Leftrightarrow \frac{r}{h} = \operatorname{cotg}\varphi \Leftrightarrow r = h.\operatorname{cotg}\varphi \Leftrightarrow \frac{a}{2} = 3.\operatorname{cotg}60^\circ = 3.\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ и $a = 2\sqrt{3}$ cm;

$BM^2 = OM^2 + OB^2$ и $l^2 = h^2 + R^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 9 + \left(\frac{2\sqrt{3}.\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 9 + 6 = 15$, $l = \sqrt{15}$ cm.

## 7. ГОДИШЕН ПРЕГОВОР

**Вариант 1**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| А | Г | В | Б | В | $S_8 = -1785$ | $CO : CD = 8 : 11$ | $AH = \frac{60\sqrt{3}}{13}$ |




**8.** От косинусовата теорема за $\Delta ABC$ намираме

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 60^\circ = 64 + 225 - 2.8.15.\frac{1}{2} = 169$ и $BC = 13$.

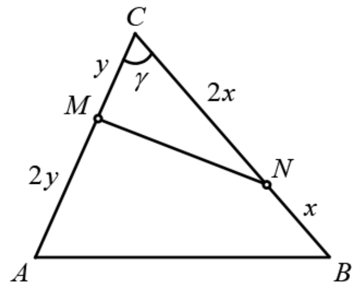
Пресмятаме лицето $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 60^\circ = \frac{1}{2}BC.AH \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.8.15.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}.13.AH \Leftrightarrow AH = \frac{8.15.\sqrt{3}}{2.13} = \frac{60\sqrt{3}}{13}$.

**Вариант 2**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Г | В | В | В | В | $S = 1210$ | $CL = \frac{10}{3}$ | $S_{ABC} = 63$ cm² |

**8.** Нека $BN = x$, $CM = y$ и $\sphericalangle C = \gamma$.




Тогава $CN = 2x$, $AM = 2y$, $S_{MNC} = \frac{1}{2}CN.CM.\sin\gamma = xy.\sin\gamma$,

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.BC.\sin\gamma = \frac{9xy}{2}.\sin\gamma$, $\frac{S_{MNC}}{S_{ABC}} = \frac{2}{9}$ и $S_{ABC} = \frac{9}{2}S_{MNC} = \frac{9}{2}.14 = 63$ cm$^2$.

## ПРИМЕРНА КЛАСНА РАБОТА – I СРОК

**Вариант 1**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| А | А | В | Б | Г | $K_0 = 10\ 000$ лева | $x = 20$ | $a_1 = d = 5$ |

**6.** Ако началната сума е $K_0$, то след втората сума влогът ще бъде $K_2 = K_0\left(1+\frac{2}{100}\right)^2 = K_0.1{,}0404$.

Тогава $K_0 + 404 = K_0.1{,}0404$, откъдето $K_0 = 10\ 000$ лева.

**7.** Записваме уравнението във вида $\sqrt{2(x-2)} = 1+\sqrt{x+5}$. Тъй като и двете страни на последното уравнение са неотрицателни, след повдигане в квадрат получаваме еквивалентното уравнение:

$$2(x-2) = 1+2\sqrt{x+5}+x+5 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+5} = x-10 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}4(x+5) = (x-10)^2\\ x-10 \ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x^2-24x+80 = 0\\ x \ge 10.\end{array}\right.$$

Корените на квадратното уравнение са $x_1 = 20$ и $x_2 = 4$, като $x_1 > 10$, $x_2 < 10$.

Следователно ирационалното уравнение има единствено решение $x = 20$.

**8.** Тъй като $a_2$, $a_4$ и $a_8$ образуват геометрична прогресия и $a_2 = a_1 + d$, $a_4 = a_1 + 3d$ и $a_8 = a_1 + 7d$, то

$a_4^2 = a_2a_8 \Leftrightarrow (a_1+3d)^2 = (a_1+d)(a_1+7d) \Leftrightarrow a_1 = d$.

Сега от $a_6 = 30$ и $a_6 = a_1 + 5d = 6a_1$ получаваме $a_1 = d = 5$.

**Вариант 2**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Г | В | Б | Г | В | $K_0 = 10\ 000$ лева | $x_1 = 1$, $x_2 = -3$ | $a_1 = d = 5$ |

**6.** Ако началната сума е $K_0$, то след втората сума влогът ще бъде $K_2 = K_0\left(1+\frac{3}{100}\right)^2 = K_0.1{,}0609$.

Тогава $K_0 + 609 = K_0.1{,}0609$, откъдето $K_0 = 10\ 000$ лева.

**7.** Полагаме $\sqrt{2x^2+4x+3} = t,\ t \ge 0$. Тогава $2(x^2+2x)+3 = t^2$ и $x^2+2x = \frac{t^2-3}{2}$.

Решаваме уравнението $\frac{t^2-3}{2}+t = 6 \Leftrightarrow t^2+2t-15 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -5 < 0,\ t_2 = 3 > 0$.

При $t = 3$ намираме: $x^2+2x = \frac{3^2-3}{2} \Leftrightarrow x^2+2x-3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -3$, които са търсените решения.

**8.** Тъй като $a_1$, $a_3$ и $a_9$ образуват геометрична прогресия и $a_3 = a_1 + 2d$, $a_9 = a_1 + 8d$, то

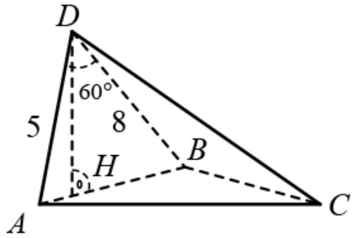
$$a_3^2 = a_1 a_9 \Leftrightarrow (a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 8d) \Leftrightarrow a_1 = d.$$

Сега от $a_5 = 25$ и $a_5 = a_1 + 4d = 5a_1$ получаваме $a_1 = d = 5$.

## ПРИМЕРНА КЛАСНА РАБОТА – II СРОК

**Вариант 1**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Б | В | А | Б | Г | $AM = \frac{\sqrt{19}}{2}$ | $V = 96$ cm³ | $V = 35$ cm³ |




**8.** В $\Delta ABD$ построяваме височината $DH$ към страната $AB$.

От $(ABD)\perp(ABC)$ следва, че $DH$ е височината на пирамидата.

От косинусовата теорема за $\Delta ABD$ намираме

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD.BD.\cos 60° = 25 + 64 - 2.5.8.\frac{1}{2} = 49 \text{ и } AB = 7 \text{ cm}.$$

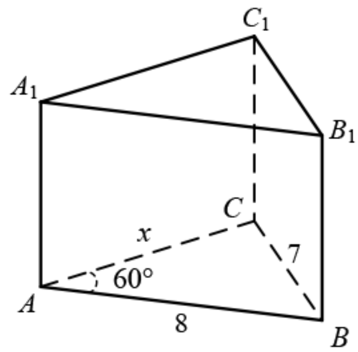
От $S_{ABD} = \frac{1}{2}AD.BD.\sin 60° = \frac{1}{2}AB.DH \Leftrightarrow \frac{1}{2}.5.8.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}.7.DH$ намираме $DH = \frac{5.8.\sqrt{3}}{2.7} = \frac{20\sqrt{3}}{7}$.

Лицето на равностранния $\Delta ABC$ е $S_{ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$ cm²,

а обемът на тетраедъра – $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.DH = \frac{1}{3}.\frac{49\sqrt{3}}{4}.\frac{20\sqrt{3}}{7} = 35\,\text{cm}^3$.

**Вариант 2**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Г | Б | В | Б | Б | $AL = 6$ cm | $\sqrt{13}$ cm | $V = 60\sqrt{3}$ cm³ |




**8.** Означаваме $AC = x$ и прилагаме косинусовата теорема за страната $BC$.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 60° \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 49 = 64 + x^2 - 2.8x.\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3,\ x_2 = 5.$$

При $x = 3$ $\Delta ABC$ е тъпоъгълен (тогава $AB^2 > AC^2 + BC^2 \Leftrightarrow 64 > 9 + 49$),

а при $x = 5$ триъгълникът е остроъгълен ($AB^2 < AC^2 + BC^2 \Leftrightarrow 64 < 25 + 49$).

По условие триъгълникът е тъпоъгълен, следователно $AC = 3$ cm и периметърът на триъгълника е

$P = 8 + 7 + 3 = 18$ cm, а лицето $B = \frac{1}{2}AC.BC.\sin 60° = \frac{1}{2}.3.8.\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm².

От равенството $S = Ph$ за лицето на околната повърхнина намираме височината $h$ на призмата: $h = \frac{S}{P} = \frac{180}{18} = 10\,\text{cm}$.

Обемът на призмата е $V = Bh = 6\sqrt{3}.10 = 60\sqrt{3}$ cm³.

# ОТГОВОРИ, УПЪТВАНИЯ И РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ УЧЕБНИКА ПО МАТЕМАТИКА ЗА 10. КЛАС

## 1. КВАДРАТНИ КОРЕНИ. ДЕЙСТВИЯ С КОРЕНИ

**1.** а) $29\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{10}$; в) $3\sqrt{3}$; г) $\sqrt{2}$.

**2.** а) 8; б) 1; в) 3; г) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$.

**3.** а) $4\sqrt{10}<9\sqrt{2}$; б) $5\sqrt{5}<8\sqrt{2}$; в) $7\sqrt{3}>12$; г) $5\sqrt{3}+3\sqrt{5}>6\sqrt{2}+2\sqrt{10}$.

## 2. ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА ИЗРАЗИ, СЪДЪРЖАЩИ КВАДРАТНИ КОРЕНИ

**1.** а) $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$; б) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$; в) $\dfrac{\sqrt{15}}{20}$; г) $\dfrac{\sqrt{66}}{132}$. **2.** а) $\dfrac{12\left(\sqrt{35}+\sqrt{14}\right)}{7}$; б) $-\sqrt{3}-4$; в) $4\sqrt{3}+3\sqrt{5}$.

**3.** а) $2\sqrt{2}$; б) 6.

## 3. ВХОДНО РАВНИЩЕ. ТЕМА ЗА САМОКОНТРОЛ

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Г) | Б) | Б) | В) | А) | 60 cm$^2$ | 4 | 240 кв. см |

**8.** Да означим дължината на бедрото $AD$ с $x$. Тъй като в $ABCD$ може да се впише окръжност, имаме $AB + CD = AD + BC$. От това равенство следва $20 + 12 = x + BC$, откъдето $BC = 32 - x$.

Нека точка $H$ от $AB$ е такава, че $CH$ е перпендикулярна на $AB$. Тогава триъгълник е правоъгълен, като $BH = AB - AH = 8$, $CH = AD = x$ и $BC = 32 - x$. От питагоровата теорема получаваме:

$BC^2 = CH^2 + BH^2 \Leftrightarrow (32 - x)^2 = x^2 + 8^2 \Leftrightarrow x = 15$

За лицето на трапеца получаваме: $S=\dfrac{\left(AB+CD\right)}{2}.h=16.15=240$ cm$^2$.

## 4. ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

**1.** Изразът $\sqrt{\dfrac{-5}{3x-6}}$ съществува при $\dfrac{-5}{3x-6}\geq 0 \Leftrightarrow 3x-6<0 \Leftrightarrow x<2$ и следователно няма смисъл при $x \geq 2$ (отг. Г).

**2.** Дефиниционната област се определя от съществуването на $\sqrt{x}$ и неравенството $\sqrt{x}-1\neq 0$, т.е. от $x \geq 0$ и $x \neq 1$ (отг. Г).

**3.** Числената стойност на израза $\sqrt{\sqrt{25.x}-\sqrt{9.y}}$ за $x = 25$ и $y = 9$ е равна на

$\sqrt{\sqrt{25.25}-\sqrt{9.9}}=\sqrt{\sqrt{25^2}-\sqrt{9^2}}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$.

**4.** Тъй като $|x| \geq 0$ за всяко $x\in\mathbb{R}$, то $\sqrt{|x|}$ винаги съществува и допустимите стойности на израза $\dfrac{\sqrt{|x|}}{x}$ се определят от неравенството $x \neq 0$, т.е. при $x\in\left(-\infty;\,0\right)\cup\left(0;\,\infty\right)$.

**5.** Изразът не е дефиниран за $x = 0$ и $x = 5$, за $x = -5$ стойността е 0, а за $x = 4$ е $\sqrt{3}$.

## 5. ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

**1.** *I начин.* Квадратният корен $A=\sqrt{(-2)^2x^2b}=\sqrt{2^2x^2b}$ съществува при $2^2x^2b\geq 0 \Leftrightarrow b\geq 0$ и $A=2|x|\sqrt{b}=-2x\sqrt{b}$, ако $|x| = -x$. Последното равенство е изпълнено при $x \leq 0$. Следователно $\sqrt{(-2)^2x^2b}=-2x\sqrt{b}$ е вярно за $x\leq 0$, $b\geq 0$ (отг. Б).

*II начин*. При $b\leq 0$ $\sqrt{b}$ не съществува и В) и Г) отпадат. Като вземем предвид, че $\sqrt{(-2)^2x^2b}\geq 0$, то равенството $\sqrt{(-2)^2x^2b}=-2x\sqrt{b}$ ще е възможно, ако $-2x\sqrt{b}\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 0$. От $b\geq 0$ и $x\leq 0$ следва, че отговорът на задачата е Б).

**2.** От $5-4\sqrt{2}<0 \Leftrightarrow \sqrt{25}<\sqrt{16.2} \Leftrightarrow \sqrt{25}<\sqrt{32}$ и $2\sqrt{2}-3<0 \Leftrightarrow \sqrt{4.2}<\sqrt{9} \Leftrightarrow \sqrt{8}<\sqrt{9}$ следва, че $A=\left|5-4\sqrt{2}\right|-\sqrt{\left(2\sqrt{2}-3\right)^2}=\left|\underbrace{5-4\sqrt{2}}_{-}\right|-\left|\underbrace{2\sqrt{2}-3}_{-}\right|=4\sqrt{2}-5-\left(3-2\sqrt{2}\right)=4\sqrt{2}-5-3+2\sqrt{2}=6\sqrt{2}-8.$

**3.** $A=\dfrac{5}{2\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2.3}=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$;

$B=\dfrac{11}{2\sqrt{5}+3}=\dfrac{11\left(2\sqrt{5}-3\right)}{\left(2\sqrt{5}+3\right)\left(2\sqrt{5}-3\right)}=\dfrac{11\left(2\sqrt{5}-3\right)}{\left(2\sqrt{5}\right)^2-3^2}=\dfrac{11\left(2\sqrt{5}-3\right)}{4.5-9}=\dfrac{11\left(2\sqrt{5}-3\right)}{11}=2\sqrt{5}-3.$

**4.** $A=\dfrac{7}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}-\dfrac{17}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{7\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}-\dfrac{17\left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(2\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=$

$=\dfrac{7\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{4.3-5}-\dfrac{17\left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{4.5-3}=\dfrac{\cancel{7}\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{\cancel{7}}-\dfrac{\cancel{17}\left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\cancel{17}}=2\sqrt{3}-\sqrt{5}-2\sqrt{5}-\sqrt{3}=\sqrt{3}-3\sqrt{5}.$

**5.** Полагаме $\sqrt{x}=u,\ u\geq 0$. При $x\neq 0$, $x\neq 4$ получаваме $u\neq 0$, $u\neq 2$.

Тогава $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{x-2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x+2\sqrt{x}}\right)=\dfrac{u+1}{u^2+2u}+\dfrac{u-2}{2u}\left(\dfrac{1}{u^2-2u}+\dfrac{1}{u^2+2u}\right)=$

$=\dfrac{u+1}{u(u+2)}+\dfrac{u-2}{2u}\left[\dfrac{1}{u(u-2)}+\dfrac{1}{u(u+2)}\right]=\dfrac{u+1}{u(u+2)}+\dfrac{u-2}{2u}.\dfrac{u+2+u-2}{u(u-2)(u+2)}=$

$=\dfrac{u+1}{u(u+2)}+\dfrac{1}{2u}.\dfrac{2u}{u(u+2)}=\dfrac{u+1}{u(u+2)}+\dfrac{1}{u(u+2)}=\dfrac{u+2}{u(u+2)}=\dfrac{1}{u}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{x}.$

## 6. ИРАЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ЕДИН КВАДРАТЕН РАДИКАЛ

**1.** а) Повдигаме двете страни на уравнението $2\sqrt{2x-3}=x+2$ в квадрат и получаваме: $4(2x-3)=x^2+4x+4 \Leftrightarrow x^2-4x+16=0$. Полученото уравнение няма реални корени ($D=4-16=-12$) и следователно ирационалното уравнение няма решение, т.е. $x\in\varnothing$.

б) $x=-1$; в) $x=\sqrt{10}$; г) $x\in\varnothing$.

**2.** а) $2\sqrt{2x+1}-x=2 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x+1}=x+2$. Повдигаме двете страни на уравнението $2\sqrt{2x+1}=x+2$ в квадрат и получаваме: $4(2x+1)=x^2+4x+4 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=4$. С проверка установяваме, че и двете числа са решения на даденото уравнение: $x=0$: $2\sqrt{1}=0+2$ - вярно; $x=4$: $2\sqrt{9}=4+2$ – вярно.

б) $\sqrt{-x-1}+x+7=0 \Leftrightarrow \sqrt{-x-1}=-x-7$. Повдигаме двете страни на уравнението $\sqrt{-x-1}=-x-7$ в квадрат и получаваме: $-x-1=x^2+14x+49 \Leftrightarrow x^2+15x+50=0 \Leftrightarrow x_1=-10,\ x_2=-5$.

С проверка установяваме, че само $x = -10$ е корен на ирационалното уравнение:

$x=-10$: $\sqrt{9}=10-7$ - вярно; $x=-5$: $\sqrt{4}=5-7$ - невярно.

в) $x = -1$; г) $x = -6$; д) $x \in \varnothing$.

## 7. ИРАЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ЕДИН КВАДРАТЕН РАДИКАЛ. УПРАЖНЕНИЕ

**1.** а) От $x^2 \geq 0$ и $\sqrt{x-4} \geq 0$ следва, че $x^2+\sqrt{x-4} \geq 0$, равенството $x^2+\sqrt{x-4}=-1$ е невъзможно и уравнението няма реални корени.

б) Неравенствата $2 - x \geq 0$ (тогава съществува $\sqrt{2-x}$) и $3x - 6 \geq 0$ $\left(\underbrace{\sqrt{2-x}}_{+}=\underbrace{3x-6}_{+}\right)$ са изпълнени единствено при $x = 2$, което е решението на задачата.

в) Уравнението $\sqrt{2x-1}=4+x$ няма реални корени, тъй като системата $\left|\begin{array}{l}2x-1\geq 0\\4+x\geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x\geq \frac{1}{2}\\x\leq -4\end{array}\right.$ няма решение.

г) Уравнението $\sqrt{x^2-3x+2}=2x-x^2-1$ е равносилно на $\sqrt{x^2-3x+2}=-(x-1)^2$.

От $-(x - 1)^2 \leq 0$ следва, че равенството е възможно само при $x = 1$.

С проверка установяваме, че $x = 1$ е решение $\left(\sqrt{1-3+2}=0\right)$.

**2.** а) Дефиниционното множество на уравнението е $DM: x \geq 1$ и

$\left(x^2-2x-3\right)\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow x=-1\notin DM,\ x=3\in DM,\ x=1\in DM.$

Решенията на уравнението са $x = 1$ и $x = 3$.

б) Уравнението е равносилно на $\sqrt{\left(x^2-1\right)^2}=x-1$.

*I начин.* При $x\geq 1$ $\sqrt{\left(x^2-1\right)^2}=x-1 \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)^2=(x-1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2-1\right)^2-(x-1)^2=0 \Leftrightarrow \left(x^2-1+x-1\right)\left(x^2-1-x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2+x-2\right)\left(x^2-x\right)=0$.

Корените на $x^2 + x - 2 = 0$ са $x = 1$ и $x = -2$, а на $x^2 - x = 0$: $x = 0$ и $x = 1$.

От $x \geq 1$ следва, че решение на задачата е само $x = 1$.

*II начин.* $\sqrt{\left(x^2-1\right)^2}=x-1 \Leftrightarrow \left|x^2-1\right|=x-1$.

Равенството е възможно само ако $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Тогава $x^2-1=\underbrace{(x+1)}_{+}\underbrace{(x-1)}_{+}\geq 0$ и $|x^2 - 1| = x^2 - 1$. При $x \geq 1$ решаваме уравнението

$x^2 - 1 = x - 1 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1$, като решение е само $x = 1$.

в) $x = 0$ и $x = 3$; г) $x = 0$ и $x = 5$.

## 8. ИРАЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ДВА КВАДРАТНИ РАДИКАЛА

**1.** а) Дефиниционното множество на уравнението е $y \in [1; \infty)$ и се определя от решенията на системата $\begin{cases} y+20\geq 0 \\ y-1\geq 0. \end{cases}$ Тогава $\sqrt{y+20}-\sqrt{y-1}=\sqrt{3} \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{y+20}}_{+}=\underbrace{\sqrt{3}+\sqrt{y-1}}_{+} \Leftrightarrow \cancel{y}+20=3+2.\sqrt{3}.\sqrt{y-1}+\cancel{y}-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3(y-1)}=18 \Leftrightarrow \sqrt{3(y-1)}=9 \Leftrightarrow 3(y-1)=81 \Leftrightarrow 3y=84 \Leftrightarrow y=28\in[1;\infty)$.

Следователно уравнението има единствено решение $y = 28$.

б) Уравнението е равносилно на $\sqrt{1-x}+2=\sqrt{x+9} \quad (1)$.

Повдигаме двете му страни в квадрат и получаваме уравнението $\left(\sqrt{1-x}+2\right)^2=x+9$ – следствие на (1).

То е равносилно на: $1-x+4\sqrt{1-x}+4=x+9 \Leftrightarrow 4\sqrt{1-x}=2x+4 \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x}=x+2 \quad (2)$.

Повдигаме в квадрат двете страни на (2): $4(1-x)=(x+2)^2 \Leftrightarrow 4-4x=x^2+4x+4 \Leftrightarrow x^2+8x=0 \Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=-8$. С проверка в (1) установяваме, че решение е само числото $x = 0$: при $x_1 = 0$ равенството $\sqrt{1}+2=\sqrt{9}$ е вярно; при $x_2 = -8$ равенството $\sqrt{9}+2=\sqrt{1}$ е невярно.

С проверка в даденото уравнение установяваме, че само $x = 0$ е корен.

в) $x = 5$; г) $x\in\varnothing$.

**2.** а) $x\in\varnothing$; б) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; в) $x\in\varnothing$; г) $x = \pm 12$.

## 9. ИРАЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ДВА КВАДРАТНИ РАДИКАЛА. УПРАЖНЕНИЕ

**1.** а) Дефиниционното множество на уравнението е $x \in [-1; 2]$.

Тогава $\sqrt{2-x}-\sqrt{x+1}=1 \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2-x}}_{+}=\underbrace{1+\sqrt{x+1}}_{+} \Leftrightarrow 2-x=1+2\sqrt{x+1}+x+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}=-2x \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=-x \Leftrightarrow x+1=x^2,\ x\leq 0 \Leftrightarrow x^2-x-1=0,\ x\in[-1;0]$.

Корените на $x^2 - x - 1$ са $x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\notin[-1;0]$, $x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\in[-1;0]$.

Следователно уравнението има единствено решение $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

б) Дефиниционното множество на уравнението е $x \in [-1; 9]$. Тогава

$\underbrace{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}_{+}=\underbrace{\sqrt{9-x}}_{+} \Leftrightarrow x+1+2\sqrt{2x+2}+2=9-x \Leftrightarrow 2\sqrt{2x+2}=6-2x \Leftrightarrow \sqrt{2x+2}=3-x$.

При $x \leq 3$ последното уравнение е равносилно на $2x+2=9-6x+x^2 \Leftrightarrow x^2-8x+7=0 \Leftrightarrow x_1=1,\ x_2=7$, като само $x_1 \in [-1; 9]$ и $x_1 \leq 3$. Следователно уравнението има единствено решение $x = 1$.

*Забележка*. Кое от числата $x_1 = 1$ и $x_2 = 7$ е корен на даденото уравнение може да установим с директна проверка, без да се налагат ограниченията $x \in [-1; 9]$ и $x \leq 3$.

Числото $x = 1$ е решение, тъй като равенството $\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{8}$ е вярно, докато при $x = 7$ се получава невярно числово равенство $\sqrt{8}+\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

в) $x = 2$; г) $x = 4$.

**2.** а) $x = 3$; **б)** $x_1 = 6,\ x_2 = 9$; **в)** $x_1 = -1,\ x_2 = +4$; **г)** $x_1=-\dfrac{1}{2},\ x_2=2$.

## 10. ИРАЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ, КОИТО СЕ РЕШАВАТ С ПОЛАГАНЕ

**1.** а) В уравнението $2\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x-2}}=\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-3}}+1$ полагаме $u=\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x-2}}$, $u>0$. Решаваме дробното уравнение:
$2u=\dfrac{1}{u}+1 \Leftrightarrow 2u^2-u-1=0 \Leftrightarrow u_1=1>0,\ u_2=-\dfrac{1}{2}<0$.

От $u = 1$ намираме $\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x-2}}=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-3}{x-2}=1 \Leftrightarrow x^2-3=x-2 \Leftrightarrow x^2-x-1=0$ с корени $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, които са решенията на даденото уравнение.

б) Уравнението е равносилно на $25x^2-25x-3+\sqrt{25x^2-25x+9}=0$.

Полагаме $\sqrt{25x^2-25x+9}=u$, $u\geq 0$ и получаваме: $u^2-12+u=0 \Leftrightarrow u^2+u-12=0 \Leftrightarrow u_1=-4<0,\ u_2=3>0$.

От $\sqrt{25x^2-25x+9}=3$ намираме $25x^2-25x+9=9 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=1$.

Следователно уравнението има две решения: $x = 0$ и $x = 1$.

в) Полагаме $\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}=u$, $u>0$ и получаваме уравнението $u+1=\dfrac{6}{u}$, което при $u > 0$ е равносилно на $u^2+u=6 \Leftrightarrow u^2+u-6=0 \Leftrightarrow u_1=-3,\ u_2=2\ (u_1<0<u_2)$.

От $\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}=2 \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{x-3}=4 \Leftrightarrow x+3=4(x-3),\ x\neq 3$ намираме, че уравнението има единствен корен $x = 5$.

г) $(5x-4)(2x-1)+2=3\sqrt{10x^2-13x+4} \Leftrightarrow 10x^2-13x+6=3\sqrt{10x^2-13x+4}$.

Полагаме $\sqrt{10x^2-13x+4}=u$, $u\geq 0$. Тогава $10x^2-13x+4=u^2$ и получаваме квадратното уравнение $u^2-4+6=3u \Leftrightarrow u^2-3u+2=0 \Leftrightarrow u_1=2,\ u_2=1$. Двата корена са положителни числа. Заместваме ги в равенството $10x^2-13x+4=u^2$. При $u = 2$: $10x^2-13x+4=4 \Leftrightarrow 10x^2-13x=0 \Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=\dfrac{13}{10}$;
при $u = 1$: $10x^2-13x+4=1 \Leftrightarrow 10x^2-13x+3=0 \Leftrightarrow x_3=1,\ x_4=\dfrac{3}{10}$.

**2.** Полагаме $\sqrt{2x^2+x+4}=u$, $u\geq 0$. Тогава $2x^2+x+4=u^2$ и получаваме квадратното уравнение $u^2-4+u=26 \Leftrightarrow u^2+u-30=0 \Leftrightarrow u_1=-6,\ u_2=5\ (u_1<0<u_2)$.

Заместваме $u = 5$ в равенството $2x^2+x+4=u^2 \Leftrightarrow 2x^2+x+4=25 \Leftrightarrow 2x^2+x-21=0$.

Полученото уравнение има корени $x_1$ и $x_2$ ($D = 169$), чийто сбор е $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{1}{2}$.

**3.** Полагаме $u=\sqrt{9x^2+6x+33}$, $u\geq 0$. Тогава (1) $9x^2+6x+33=u^2$, откъдето изразяваме $9x^2+6x=u^2-33$. При $u\geq 0$ решаваме уравнението $\sqrt{u^2-33+u}=3 \Leftrightarrow u^2-33+u=9 \Leftrightarrow u^2+u-42=0$ с корени $u_1=-7<0$ и $u_2=6>0$. Заместваме $u = 6$ в (1) и получаваме $9x^2+6x+33=36 \Leftrightarrow 3x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x_1=-1,\ x_2=\dfrac{1}{3}$, които са търсените решения.

## 11. ИРАЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ, КОИТО СЕ РЕШАВАТ С ПОЛАГАНЕ. УПРАЖНЕНИЕ

**1.** а) В уравнението $\sqrt{\frac{4x}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{4x}}=\frac{5}{2}$ полагаме $u=\sqrt{\frac{4x}{x-1}},\ u>0$.

Решаваме дробното уравнение: $u+\frac{1}{u}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2u^2-5u+2=0\Leftrightarrow u_1=2,\ u_2=\frac{1}{2}$, като $u_1>0$ и $u_2>0$ са решения.

От $u=2$ намираме $\sqrt{\frac{4x}{x-1}}=2\ \Leftrightarrow\ \frac{4x}{x-1}=4\Leftrightarrow 4x=4x-4\Leftrightarrow 0.x=-4\Leftrightarrow x\in\varnothing$, а от $u=\frac{1}{2}$ получаваме $\sqrt{\frac{4x}{x-1}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{4x}{x-1}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 16x=x-1\Leftrightarrow 15x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{15}$.

б) Полагаме $u=2x^2-3x$. Тогава

$\sqrt{1-u}+\sqrt{2}=\sqrt{u+9}\ \Rightarrow\ 1-u+2\sqrt{2-2u}+2=u+9\ \Leftrightarrow\ 2\sqrt{2-2u}=2u+6\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{2-2u}=u+3\ \Rightarrow\ 2-2u=u^2+6u+9\ \Leftrightarrow\ u^2+8u+7=0\ \Leftrightarrow\ u_1=-1,\ u_2=-7$.

Числото $u=-1$ е решение, тъй като равенството $\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{8}$ е вярно, докато при $u=-7$ се получава невярно числово равенство $\sqrt{8}+\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

От $u=2x^2-3x=-1\Leftrightarrow 2x^2-3x+1=0$ намираме $x_1=1$ и $x_2=\frac{1}{2}$.

в) $x=10$

г) Уравнението $\sqrt{1+\frac{2}{x}}+4.\sqrt{\frac{x}{x+2}}=4$ представяме във вида $\sqrt{\frac{x+2}{x}}+4.\sqrt{\frac{x}{x+2}}=4$. Полагаме $\sqrt{\frac{x+2}{x}}=u,\ u>0$ и получаваме уравнението $u+\frac{4}{u}=4$, което при $u>0$ е равносилно на $u^2+u=4u\Leftrightarrow u^2-4u+4=0\Leftrightarrow(u-2)^2=0\Leftrightarrow u=2$.

Тогава $\sqrt{\frac{x+2}{x}}=u\ \Leftrightarrow\ \sqrt{\frac{x+2}{x}}=2\ \Leftrightarrow\ \frac{x+2}{x}=4\ \Leftrightarrow\ x+2=4x\ \Leftrightarrow\ 3x=2\ \Leftrightarrow\ x=\frac{2}{3}$.

Следователно ирационалното уравнение има единствено решение $x=\frac{2}{3}$.

**2.** $x_1+x_2=-2;\ x_1.x_2=-\frac{1}{3}$. **3.** а) $x=9$; б) 81; в) $x_1=3;\ x_2=-\frac{1}{3}$; г) $x\in\varnothing$.

## 12. ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ. ИРАЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ. ТЕМА ЗА САМОКОНТРОЛ

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| В | Г | А | Г | Б | $A=\frac{\sqrt{x}}{x}$ | $\left\{-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right\}$ | $x=-6$ |

**8.** Уравнението е равносилно на $\sqrt{x^2-10x+32}=2\sqrt{2}-\sqrt{2}x$.

Повдигаме двете му страни в квадрат и получаваме: $x^2-10x+32=\left(2\sqrt{2}-\sqrt{2}x\right)^2\Leftrightarrow x^2-10x+32=8-8x+2x^2\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2+2x+24=0\Leftrightarrow x_1=-6,\ x_2=4$.

С проверка установяваме, че решение е само числото $x=-6$:
при $x_1=-6$ получаваме $\sqrt{36+60+32}-6\sqrt{2}=2\sqrt{2}\ \Leftrightarrow\ \sqrt{128}=6\sqrt{2}+2\sqrt{2}\ \Leftrightarrow\ 8\sqrt{2}=8\sqrt{2}$ – вярно числово равенство;
при $x_2=4$ получаваме $\sqrt{16-40+32}+4\sqrt{2}=2\sqrt{2}\ \Leftrightarrow\ \sqrt{8}=2\sqrt{2}-4\sqrt{2}\ \Leftrightarrow\ 2\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$ – невярно числово равенство.

## 13. ЧИСЛОВИ РЕДИЦИ. НАЧИНИ ЗА ЗАДАВАНЕ НА ЧИСЛОВИ РЕДИЦИ

**1. а)** 4, 5, 6, 7,8; **б)** 4, 7, 13, 25, 49; **в)** –9, –6, –3, 0, 3; **г)** 2, 3, 5, 7, 11.

**2. а)** $a_1 = 15$, $a_7 = 57$; **б)** $a_1 = 3$, $a_7 = -3$; **в)** $a_1 = 11$, $a_7 = 17$; **г)** $a_1 = 1$, $a_7 = 65$. **3. а)** растяща; **б)** намаляваща.

**4. а)** рекурентна формула: $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n + 3$, формула за общия член: $a_n = 3_n + 2$;

**б)** рекурентна формула: $a_1 = 8$, $a_{n+1} = a_n - 2$, формула за общия член: $a_n = -2n + 10$.

**5.** За да е намаляваща редицата, трябва да е изпълнено неравенството $a_{n-1} > a_n$. Тогава $a_{n-1} > 3a_{n-1}$, откъдето получаваме $a_{n-1} < 0$. Следователно всички членове на редицата са отрицателни и $a_1 < 0$.

## 14. АРИТМЕТИЧНА ПРОГРЕСИЯ. ФОРМУЛА ЗА ОБЩИЯ ЧЛЕН НА АРИТМЕТИЧНА ПРОГРЕСИЯ

**1. а)** $a_n = 7n - 20$; **б)** $a_n = -2n + 37$; **в)** $a_n = 0{,}6n + 1{,}8$; **г)** $a_n = -\frac{3}{8}n + \frac{7}{8}$.

**2. а)** $a_5 = 29$, $a_{10} = 64$, $a_{100} = 694$; **б)** $a_5 = -12{,}9$, $a_{10} = -32{,}4$, $a_{100} = -383{,}4$. **3. а)** $a_1 = 22$; **б)** $d = 1$.

**4. а)** От $a_{10} = a_1 + 9d$ и $a_{23} = a_1 + 22d$ получаваме системата $\left|\begin{array}{l} a_1 + 9d = 32 \\ a_1 + 22d = 58 \end{array}\right.$. След изваждане получаваме $13d = 26$, откъдето $d = 2$ и тогава $a_1 = 14$;

**б)** От $a_8 = a_1 + 7d$ и $a_{11} = a_1 + 10d$ получаваме системата $\left|\begin{array}{l} a_1 + 7d = -5 \\ a_1 + 10d = 25 \end{array}\right.$. След изваждане получаваме $3d = 30$, откъдето $d = 10$ и тогава $a_1 = -75$.

**5.** Ако $d > 0$, имаме $a_n = a_{n-1} + d > a_{n-1}$ и следователно редицата е растяща.
Ако $d < 0$, имаме $a_n = a_{n-1} + d < a_{n-1}$ и следователно редицата е намаляваща.

**6.** Броят на задачите през всеки от дните образуват аритметична прогресия с първи член $a_1 = 1$ и разлика $d = 2$. Тогава $a_{12} = a_1 + 11d = 1 + 11.2 = 23$.

**7.** Да разгледаме два последователни члена на тази редица: $a_n = x.n + y$ и $a_{n+1} = x.(n + 1) + y$. За тяхната разлика имаме $a_{n+1} - a_n = x.(n + 1) + y - x.n - y = x$. Това означава, че разликата на всеки два последователни члена на редицата е равна на $x$, т.е. редицата е аритметична прогресия.

## 15. АРИТМЕТИЧНА ПРОГРЕСИЯ. ФОРМУЛА ЗА ОБЩИЯ ЧЛЕН НА АРИТМЕТИЧНА ПРОГРЕСИЯ. УПРАЖНЕНИЕ

**1. а)** $a_5 = 25$, $a_{10} = 55$, $a_{34} = 199$; **б)** $a_5 = -14$, $a_{10} = -29$, $a_{34} = -101$; **в)** $a_5 = 9{,}5$; $a_{10} = 22$; $a_{34} = 82$;

**г)** $a_5 = 2$, $a_{10} = \frac{11}{3}$, $a_{34} = \frac{35}{3}$.

**2.** а) Тъй като $a_3 - a_2 = d$, то $d = 7$ и тогава $a_1 = a_2 - d = 1$;

б) Тъй като $a_{10} - a_7 = 3d$, то $d = -0{,}75$ и тогава $a_1 = a_7 - 6d = 7{,}75$;

в) Тъй като $a_{22} - a_{13} = 9d$, то $d = -9$ и тогава $a_1 = a_{13} - 12d = 182$;

г) Тъй като $a_{89} - a_{56} = 33d$, то $d = 5$ и тогава $a_1 = a_{56} - 55d = -344$.

**3.** а) Тъй като $6 = a_{31} - a_{25} = 6d$ то $d = 1$. Сега от $50 = a_{23} + a_{27} = 2a_1 + 48d$ получаваме $a_1 = 1$;

б) Тъй като $-193 = a_{100} + a_{101} = 2a_1 + 199d$ и $-157 = a_{77} + a_{88} = 2a_1 + 163d$, след изваждане получаваме $-36 = 36d$, т.е. $d = -1$. От първото уравнение намираме $a_1 = 3$.

**4.** От $8d = a_{10} - a_2 = -16$ получаваме $d = -2$, откъдето $a_1 = a_2 - d = 10$. Търсим $n$, за което $a_n = a_1 + (n - 1)d = 10 + (n - 1)(-2) = -120$. От това равенство намираме $n = 66$.

**5.** Броят на произведените през всеки месец автомобили образува аритметична прогресия с първи член $a_1 = 1000$ и $a_{12} = 1550$. Тогава $a_{12} - a_1 = 550 = 11d$, откъдето $d = 50$.

**6.** Тъй като $6d = a_7 - a_1 = 18$, то $d = 3$ и останалите членове са $-2, 1, 4, 7, 10$.

**7.** От $a_n + a_{n+1} = 2a_1 + (2n-1)d = 1{,}2 + (2n-1).0{,}5 = 11{,}7$ получаваме $n = 11$.

**8.** От $24 = a_1 + a_2 + a_4 + a_5 = 4a_1 + 8d = 4(a_1 + 2d) = 4a_3$ следва, че $a_3 = 6$.

## 16. СВОЙСТВА НА АРИТМЕТИЧНАТА ПРОГРЕСИЯ

**1.** а) От $2x = 3 + 5$ намираме $x = 4$;

б) От $2(3x) = 2x + 8$ намираме $x = 2$;

в) От $2.7 = (x - 2) + (x + 6)$ намираме $x = 5$;

г) От $2.(-1) = 2x^2 + 4x$ намираме $x^2 + 2x + 1 = 0$, т.е. $x = -1$;

д) От $2.11 = 6 + x^2$ намираме $x^2 = 16$, т.е. $x = 4$ или $x = -4$;

е) От $2.5 = x^3 + x$ получаваме $x^3 + x - 10 = 0$. Тъй като $x^3 + x - 10 = (x-2)(x^2 + 2x + 5)$, то $x = 2$ е единственото решение.

**2.** а) Тъй като $a_1 = 3$ и $a_4 = -9$, то $3d = a_4 - a_1 = -12$, откъдето $d = -4$. Следователно $x = 3 + (-4) = -1$ и $y = -1 + (-4) = -5$;

б) От $2(x + 2) = x + y$ и $2y = (x + 2) + 2x$ получаваме $x = y - 4$ и $3x + 2 = 2y$. Следователно $x = 6$ и $y = 10$;

в) От $2y = x + 2x$ и $4x = y + 5$ получаваме $3x = 2y$ и $4x = y + 5$. Следователно $x = 2$ и $y = 3$;

г) От $2(x - y) = (x + y) + (x + 3)$ и $2(x + 3) = (x - y) + 11$ получаваме $y = -1$ и $x = 5 - y$. Следователно $x = 6$ и $y = -1$.

**3.** а) От $a_7 + a_{11} = 2a_1 + 16d = 2(a_1 + 8d) = a_9$ получаваме $a_9 = -8$;

б) От $a_8 + a_{10} = 2a_1 + 16d = a_7 + a_{11}$ получаваме $a_8 + a_{10} = -8$;

в) $a_5 + a_6 + a_{12} + a_{13} = 4a_1 + 32d = 2(a_7 + a_{11}) = -16$.

**4.** $a_2 + a_3 + a_{11} + a_{12} = 4a_1 + 24d = 4(a_1 + 6d) = 4a_7 = 28$.

**5.** $a_{43} + a_{29} + a_{257} + a_{271} = 4a_1 + 596d = 2(2a_1 + 298d) = 2(a_{100} + a_{200}) = 42$.

**6.** От $2(-2) = x + y$ и $2(-x) = 18 + y - 6$ получаваме $x + y = -4$ и $2x + y = -12$. Следователно $x = -8$ и $y = 4$.

**7.** Тъй като $a_1 = -11$ и $a_7 = 19$, то $6d = a_7 - a_1 = 30$, т.е. $d = 5$. Числата са $-6, -1, 4, 9$ и $14$.

**8.** Тъй като $2b = a + c$ и $2y = x + z$, то $2(b + y) = a + c + x + z = (a + x) + (c + z)$, което означава, че $a + x$, $b + y$ и $c + z$ образуват аритметична прогресия.

**9.** От $2(x + 1) = x^3 + 20 + x^2 - 6$ получаваме уравнението $x^3 + x^2 - 2x + 12 = 0$.

Тъй като $x^3 + x^2 - 2x + 12 = (x + 3)(x^2 - 2x + 4)$, единственото решение е $x = -3$.

## 17. ФОРМУЛА ЗА СБОРА НА ПЪРВИТЕ $n$ ЧЛЕНА НА АРИТМЕТИЧНА ПРОГРЕСИЯ

**1.** а) $S_9=\frac{a_1+a_9}{2}.9=81$; б) $S_{24}=\frac{a_1+a_{24}}{2}.24=-624$; в) $S_{10}=\frac{2a_1+9d}{2}.10=-8,5$; г) $S_{23}=\frac{2a_1+22d}{2}.23=69$.

**2.** От $S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}.n$ изразяваме $a_1=\frac{2S_n-n(n-1)d}{2n}$;

а) $a_1=\frac{-68-17.16.2}{2.17}=-18$; б) $a_1=\frac{192-6.5.(-1)}{2.6}=18,5$; в) $a_1=\frac{260-39.38.\left(\frac{1}{3}\right)}{2.39}=-3$;

г) $a_1=\frac{150-25.24.4}{2.25}=-93$.

**3.** От $S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}.n$ изразяваме $d=\frac{2S_n-2na_1}{n(n-1)}$.

а) $d=\frac{72-2.8.1}{8.7}=1$; б) $d=\frac{100-20}{4.3}=\frac{20}{3}$; в) $d=\frac{-63-18}{9.8}=-1$; г) $d=\frac{162}{9.8}=2,25$.

**4.** От $S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}.n$ получаваме $dn^2+(2a_1-d)n-2S_n=0$. Положителните корени на това квадратно уравнение са решения на задачата.
а) $-n^2+15n-56=0$ с корени $n=7$ и $n=8$; б) $8n^2-14n-204=0$ с положителен корен $n=6$;
в) $4n^2-4n-440=0$ с положителен корен $n=11$; г) $\frac{5}{6}n^2+\frac{1}{2}n-72=0$ с положителен корен $n=9$.

## 18. ФОРМУЛА ЗА СБОРА НА ПЪРВИТЕ $n$ ЧЛЕНА НА АРИТМЕТИЧНА ПРОГРЕСИЯ. УПРАЖНЕНИЕ

**1.** а) $S_8=\frac{2a_1+7d}{2}.8=52$; б) $S_{13}=\frac{2a_1+12d}{2}.13=247$;
в) $S_{22}=\frac{2a_1+21d}{2}.22=-385$; г) $S_{17}=\frac{2a_1+16d}{2}.17=391$.

**2.** а) $a_1=11$, $d=3$ и от $a_n=11+(n-1).(-3)=-16$ намираме $n=10$. От тук $S_{10}=\frac{11+(-16)}{2}.10=-25$;
б) $a_1=-72$, $d=11$ и от $a_n=-72+(n-1).11=5$ намираме $n=8$. От тук $S_8=\frac{-72+5}{2}.8=-268$.

**3.** От $S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}.n$ получаваме $dn^2+(2a_1-d)n-2S_n=0$. Положителните корени на това квадратно уравнение са решения на задачата.
а) $5n^2-12n-224=0$ с положителен корен $n=8$; б) $\frac{1}{4}n^2+\frac{3}{4}n-52=0$ с положителен корен $n=13$.

**4.** От $S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}.n$ изразяваме $a_1=\frac{2S_n-n(n-1)d}{2n}$.

а) $a_1=\frac{-10.9.2}{2.10}=-9$; б) $a_1=\frac{-42-21.20.2,4}{2.21}=-25$.

**5.** От $S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}.n$ изразяваме $d=\frac{2S_n-2na_1}{n(n-1)}$. а) $d=\frac{72}{9.8}=1$; б) $d=\frac{-62-2.31.14}{31.30}=-1$

**6.** а) От $15=S_5=\frac{a_1+a_5}{2}.5=\frac{-2+a_5}{2}.5$ намираме $a_5=8$;

б) От $7 = S_{14} = \frac{a_1 + a_{14}}{2}.14 = \frac{15 + a_{14}}{2}.14$ намираме $a_{14} = -14$.

**7.** От $49 = S_7 = \frac{a_1 + a_7}{2}.7$ намираме $a_1 + a_7 = 14$ и понеже $2a_4 = a_1 + a_7$, то $a_4 = 7$.

**8.** От $77 = S_{11} = \frac{2(-3)+10d}{2}.11$ намираме $d = 2$ и следователно $a_5 = -3 + 4.2 = 5$.

**9.** а) Тъй като $S_5 = S_6$, то $a_6 = 0$ и следователно $0 = 18 + 5d$, т.е. $d = -3,6$;
б) Тъй като $S_{10} = S_{13}$, то $a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0$ и следователно $0 = 3a_1 + 33d$, $= 3a_1 + 33(-2)$, т.е. $a_1 = 22$.

**10.** От упътването следва, че $1 + 3 + 5 + ... + 2k - 1 = \frac{1 + (2k-1)}{2}.k = \frac{2k}{2}.k = k^2$.

## 19. ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСИЯ. ФОРМУЛА ЗА ОБЩИЯ ЧЛЕН НА ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСИЯ

**1.** а) $a_n = (-2).3^{n-1}$; б) $a_n = 7.(-7)^{n-1}$; в) $a_n = \frac{5}{2}(-2)^{n-1}$; г) $a_n = 2,5.10^{n-1}$.

**2.** а) $a_3 = 2^2 = 4$, $a_{11} = 2^{10} = 1024$, $a_{13} = 2^{12} = 4096$; б) $a_3 = 27$, $a_{11} = 243$, $a_{13} = \frac{1}{2187}$. **3.** а) $a_1 = -\frac{1}{4}$; б) $q = 2$.

**4.** а) От $q^5 = \frac{a_8}{a_3} = 243 = 3^5$ получаваме $q = 3$ и следователно $a_1 = \frac{1}{3}$;

б) От $q^3 = \frac{a_5}{a_2} = -\frac{1}{8}$ получаваме $q = -\frac{1}{2}$ и следователно $a_1 = 80$. **5.** $a_8 = 2^7 = 128$.

**6.** От $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{3^n}{3^{n-1}} = 3$ следва, че $a_n = 3a_{n-1}$ и редицата е геометрична прогресия с първи член $a_1 = 3^1 = 3$.

## 20. ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСИЯ. ФОРМУЛА ЗА ОБЩИЯ ЧЛЕН НА ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСИЯ. УПРАЖНЕНИЕ

**1.** а) $a_2 = 7.2 = 14$, $a_3 = 7.2^2 = 28$, $a_4 = 7.2^3 = 56$; б) $a_2 = -2.4 = -8$, $a_3 = -2.16 = -32$, $a_4 = -2.64 = -132$;
в) $a_2 = 0,5.6 = 3$, $a_3 = 0,5.6^2 = 18$, $a_4 = 0,5.6^3 = 108$; г) $a_2 = -1$, $a_3 = 3$, $a_4 = -9$.

**2.** а) $q = \frac{a_3}{a_2} = 3$ и $a_1 = \frac{a_2}{q} = 5$; б) $q = \frac{a_5}{a_4} = -2$ и $a_1 = \frac{a_4}{q^3} = -4$; в) $q^3 = \frac{a_6}{a_3} = -27$, т.е. $q = -3$ и $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = -\frac{2}{9}$;

г) $q^4 = \frac{a_{12}}{a_8} = 10000$, т.е. $q = \pm 10$ и $a_1 = \frac{a_8}{q^7} = \pm\frac{1}{10^7}$.

**3.** а) Решаваме системата $\begin{vmatrix} a_1 + a_1 q = \frac{4}{3} \\ a_1 q + a_1 q^2 = 4 \end{vmatrix}$ с разделяне на двете уравнения и получаваме $a_1 = \frac{1}{3}$ и $q = 3$;

б) Решаваме системата $\begin{vmatrix} a_1 q^5 - a_1 q^3 = 24 \\ a_1 q^3 + a_1 q^4 = 24 \end{vmatrix}$ с разделяне на двете уравнения и получаваме $a_1 = 1$ и $q = 2$.

**4.** От $q^3 = \frac{a_5}{a_2} = -8$ следва, че $q = -2$ и $a_1 = -\frac{1}{8}$. Сега от $2^{10} = 1024 = a_n = \left(-\frac{1}{8}\right)(-2)^{n-1} = (-2)^{n-4}$ следва, че $n = 14$.

**5.** От $q^5 = \frac{a_6}{a_1} = 243$ следва, че $q = 3$ и $a_2 = 6$, $a_3 = 18$, $a_4 = 54$, $a_5 = 162$.

**6.** От $5.2^{n-1} + 5.2^{n-2} = 240$ получаваме $3.2^{n-1} = 48$, откъдето $n = 5$.

**7.** От $121 = a_1.a_5 = a_1^2.q^4 = \left(a.q^2\right)^2 = a_3^2$ следва, че $a_3 = 11$.

**8.** От $a + b + c = 13$, $abc = 27$ и $b^2 = ac$ получаваме $b^3 = 27$. Следователно $b = 3$ и от $a + c = 10$ и $ac = 9$ намираме $a = 1$, $c = 9$ или $a = 9$, $c = 1$.

## 21. СВОЙСТВА НА ГЕОМЕТРИЧНАТА ПРОГРЕСИЯ

**1.** а) От $x^2 = 4x$ получаваме $x = 4$;
б) От $(10 + x)^2 = (x - 2).(-27)$ получаваме $x^2 + 47x + 46 = 0$, откъдето $x = -1$ или $x = -46$;
в) От $9x^2 = 12(x + 1)$ получаваме $3x^2 - 4x - 4 = 0$, откъдето $x = 2$ или $x = -\frac{2}{3}$;
г) От $(-1)^2 = 2x^2$ получаваме $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$;
д) От $(x + 1)^2 = x\,(x + 3)$ получаваме $x = 1$;
е) От $(5x)^2 = x^4$ получаваме $x = \pm 5$.

**2.** а) Тъй като $q^3 = \frac{a_4}{a_1} = 8$, то $q = 2$ и следователно $x = 6$, $y = 12$;
б) Решаваме системата $\begin{vmatrix} (x+2)^2 = xy \\ y^2 = 8x(x+2) \end{vmatrix}$ чрез повдигане на първото уравнение на втора степен и заместваме в $y^2 = 8x(x + 2)$. Получаваме $x + 2 = 2x$, откъдето $x = 2$, $y = 8$;
в) От второто уравнение на системата $\begin{vmatrix} y^2 = 2x^2 \\ 4x^2 = x^2 y \end{vmatrix}$ получаваме $y = 4$, след което от първото намираме $x = \pm 2\sqrt{2}$;
г) От второто уравнение на системата $\begin{vmatrix} x^2 y^2 = x^2(x+y) \\ x^4 = 4x^2 y^2 \end{vmatrix}$ получаваме $x = \pm 2y$ и след заместване в първото намираме $x = 6$, $y = 3$ или $x = 2$, $y = -1$.

**3.** а) От $8 = a_8 a_{10} = a_1^2.q^{16} = a_9^2$ следва, че $a_9 = \pm 2\sqrt{2}$; б) $a_7 a_{11} = a_8 a_{10} = 8$;
в) От $a_5 a_{13} = a_6 a_{12} = a_8 a_{10} = 8$ следва, че $a_5 a_6 a_{12} a_{13} = 64$.

**4.** Тъй като $a_4^2 = a_3 a_5$, то $a_2 a_3 a_5 a_6 = 49^2 = 2401$.

**5.** От $a_3 a_{27} = a_7 a_{23} = a_{10} a_{20} = 21$ следва, че $a_3 a_7 a_{23}\, a_{27} = 21^2 = 441$.

**6.** Тъй като $a_1 = 10$ и $a_9 = 810$, то $q^8 = \frac{a_9}{a_1} = 81$, откъдето $q = \pm\sqrt{3}$.

**7.** Тъй като $(by)^2 = b^2 y^2 = (ac)(xz) = (ax)(cz)$, то $ax$, $by$ и $cz$ образуват геометрична прогресия.

**8.** От $(x + y)^2 = x(x+y)^2$ следва, че $x = 1$, и от $2y^2 = x(x+y) = y + 1$ получаваме $y = 1$ или $y = -0{,}5$.

**9.** От $(x^2 + 2)^2 = (x + 1)(x^3 + x^2)$ получаваме $2x^3 - 3x^2 - 4 = 0$, т.е. $(x - 2)(\,2x^2 + x + 2) = 0$ или $x = 2$.

## 22. ФОРМУЛА ЗА СБОРА ОТ ПЪРВИТЕ *n* ЧЛЕНА НА ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСИЯ

**1.** Със заместване във $S_n = a_1\dfrac{q^n-1}{q-1}$ получаваме: а) $S_{11}=2047$; б) $S_5=-242$; в) $S_4=\dfrac{624}{5}$; г) $S_7=\dfrac{301}{4}$.

**2.** От $a_1 = S_n\dfrac{q-1}{q^n-1}$ получаваме: а) $a_1=\dfrac{82}{7}$ б) $a_1=\dfrac{16}{3}$.

**3.** а) От $14=21\dfrac{q^2-1}{q-1}=21(q+1)$ намираме $q=-\dfrac{1}{3}$; б) От $60=4\dfrac{q^4-1}{q-1}=4(q^3+q^2+q+1)$ получаваме $q^3+q^2+q-14=0 \Leftrightarrow (q-2)(q^2+3q+7)=0$, т.е. $q=2$.

**4.** От $121=\dfrac{3^n-1}{3-1}$ намираме $3^n=243$, откъдето $n=5$.

**5.** От $\dfrac{7}{4}=\dfrac{S_3}{a_1}=\dfrac{q^3-1}{q-1}$ намираме $(q-1)(2q-1)(2q+3)=0$, т.е. $q=\dfrac{1}{2}$ или $q=-\dfrac{3}{2}$. Тогава $\dfrac{S_4}{S_5}=\dfrac{q^4-1}{q^5-1}=\dfrac{30}{31}$ или $-\dfrac{26}{55}$.

## 23. ФОРМУЛА ЗА СБОРА ОТ ПЪРВИТЕ *n* ЧЛЕНА НА ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСИЯ. УПРАЖНЕНИЕ

**1.** Със заместване във $S_n = a_1\dfrac{q^n-1}{q-1}$ получаваме:

а) $S_3=15$; б) $S_4=-15$; в) $S_4=24$; г) $S_5=-427$; д) $S_6=-189$; е) $S_2=4$; ж) $S_7=3829$; з) $S_4=\dfrac{15}{32}$.

**2.** От $a_1 = S_n\dfrac{q-1}{q^n-1}$ получаваме: а) $a_1=3$; б) $a_1=8$.

**3.** а) От $a_1+a_1.q=3$ и $a_1+a_1.q+a_1.q^2=9$ след разделяне получаваме $(q+2)^2=0$, т.е. $q=-2$. Тогава $a_1=-3$ и $S_4=15$;

б) От $\dfrac{S_2}{S_3}=\dfrac{q^2-1}{q^3-1}=\dfrac{q+1}{q^2+q+1}=\dfrac{5}{21}$ получаваме $q=4$ или $q=-\dfrac{4}{5}$. Тогава $S_4=\dfrac{85}{2}$ или $S_4=\dfrac{41}{250}$.

**4.** а) От $a_1(1+q+q^2)=S_3$ следва $q^2+q-2=0$, откъдето $q=-2$ $(q\neq 1)$;

**б)** От $a_1(1+q+q^2+q^3)=S_4$ следва $q^3+q^2+q-14=0$, откъдето $(q-2)(q^2+3q+7)=0$ или $q=2$.

**5.** а) От $a_1(1-q^4)=2$ и $a_1(q^5-q)=8$ след разделяне получаваме $q=-4$. Тогава $a_1=-\dfrac{2}{255}$;

б) От $a_1(1+q-q^2)=-5$ и $a_1(q^3+q^4-q^5)=40$ след разделяне получаваме $q=-2$. Тогава $a_1=1$.

## 24. КОМБИНИРАНИ ЗАДАЧИ ОТ АРИТМЕТИЧНА И ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСИЯ

**1.** От $a + b + c = 18$ и $a + c = 2b$ следва $b = 6$. Тогава $a + c = 12$ и $6^2 = a(c + 8)$, откъдето след заместване $c = 12 - a$ получаваме $a = 2$ или $a = 18$. Числата са 2, 6, 10 или 18, 6, –6.

**2.** След заместване на $y = 2x - 7$ в $(x - 1)^2 = 7(y + 5)$ получаваме $x^2 - 16x + 15 = 0$, т.е. $x = 1$ или $x = 15$, като само $x = 15$ дава решение $y = 23$.

**3.** Първото условие дава, че числата са $a$, $2a$, $4a$ и от второто условие следва $a + 4a = 2(2a + 3)$, т.е. $a = 6$. Числата са 6, 12, 24.

**4.** От $\frac{2.110+(n-1)11}{2}.n = 2\left(2^{10}-1\right)$ получаваме $11n^2 + 209n - 4092 = 0$ с корени $n_1 = 12$ и $n_2 < 0$.

## 25. ПРОСТА ЛИХВА. СЛОЖНА ЛИХВА

**1.** а) Увеличението е $\frac{p}{100}.K = \frac{1,5}{100}.55\,000 = 825$ лева; б) Увеличението е $\frac{p}{100}.K = \frac{2,5}{100}.7400 = 185$ лева.

**2.** От $1000 = \frac{p}{100}.25\,000$ намираме $p = 4$.

**3.** От $15\,450 = K\left(1+\frac{3}{100}\right)$ получаваме $K = 15\,000$ лева.

**4.** След първата година лихвата е 600 лева, след втората година е 612 лева и след третата година е 624,24 лева. Общо влогът е нараснал с 1836,24 лева.

**5.** От $1800 = \frac{3,8}{100}K$ намираме $K \approx 47\,368$ лева.

**6.** Тъй като $1,03^4 = 1,125508...$, то влогът ще нарасне с $\approx 12,6\%$.

**7.** От $25\,000.1,06^5 \approx 33\,455$ и $40\,000.1,04^4 \approx 46\,794$ следва, че лихвата от първия влог е по-голяма.

## 26. ПРАКТИЧЕСКИ ЗАДАЧИ, СВЪРЗАНИ С ЛИХВА

**1.** Сумата е станала $10\,000\left(1+\frac{4}{100}\right)^5 \approx 12\,167$ и следователно е нараснала с 2167 лева.

**2.** От първия влог лихвата е $32\,000\left(1+\frac{3,5}{100}\right)^6 - 32\,000 \approx 7336$ лева, а при втория – $43\,000\left(1+\frac{1,5}{100}\right)^7 - 43\,000 \approx 4723$ лева.

**3.** Погасителната вноска е $\frac{120\,000.1,08^{15}.0,8}{1,08^{15}-1} \approx 14\,020$ лева годишно. Общо ще се върне сума от $1420.15 = 210\,293$ лева.

**4.** Не! От първия влог се получава лихва от $3\%.30\,000 = 900$ лева. Погасителната вноска по заема е $\frac{8000.1,05^{10}.0,5}{1,05^{10}-1} \approx 1036$ лева.

## 27. ПРАКТИЧЕСКИ ЗАДАЧИ, СВЪРЗАНИ С ЛИХВА. УПРАЖНЕНИЕ

**1.** Лихвата по първият влог е $\frac{2,5}{100}.12\,000.5=1500$ лева, а лихвата по вторият е $\frac{2}{100}.11000.7=1540$.

**2.** Общо за телевизора са платени 30.60 = 1800 лева и тази сума е 120% от цената без оскъпяване. Следователно $\frac{120}{100}.x=1800$, откъдето $x$ = 1500 лева.

**3.** Годишната вноска е равна на $\frac{55\,000.1,056^{15}.0,056}{1,056^{15}-1}\approx 5516$ лева, т.е. на месец приблизителната вноска е 460 лева. Доходът трябва да бъде 2300 + 460 = 2760 лева.

**4.** От $K.1{,}03^5 = 22\,000 + K$ намираме $K=\frac{22\,000}{\left(1,03^5-1\right)}\approx 138127$ лева.

## 28. ПРОГРЕСИИ. ТЕМА ЗА САМОКОНТРОЛ

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **В** | **А** | **А** | **Б** | **Г** | $q=2$ | 3238 лв. на година | 0, 5, 12, 18 |

**8.** Нека $x,\ x+d,\ x+2d,\ x+3d$ са числата, образуващи аритметична прогресия. Тогава числата $x+3,\ x+d,\ x+2d,\ x+3d+6$ образуват геометрична прогресия.

От $(x+d)^2=(x+3)(x+2d)\ \Leftrightarrow\ \cancel{x^2+2xd}+d^2=\cancel{x^2+2xd}+3x+6d\ \Leftrightarrow\ d^2=3x+6d$

и $(x+2d)^2=(x+d)(x+3d+6)\ \Leftrightarrow\ \cancel{x^2+4xd}+4d^2=\cancel{x^2+4xd}+6x+3d^2+6d\ \Leftrightarrow\ d^2=6x+6d$

получаваме системата $\left|\begin{array}{l} d^2=3x+6d \\ d^2=6x+6d \end{array}\right.$, изваждаме почленно и намираме $x=0$. Тогава

$d^2=6d\ \Leftrightarrow\ d=0,\ d=6$, като равенствата $x=0,\ d=0$ са невъзможни, тъй като $3,\ 0,\ 0,\ 6$ не могат да са членове на геометрична прогресия. При $x=0$ и $d=6$ получаваме, че дадените числа са $0,\ 6,\ 12,\ 18$.

## 30. ЦЕНТРАЛНИ ТЕНДЕНЦИИ – МОДА, МЕДИАНА И СРЕДНОАРИТМЕТИЧНО

**1. а)** Мода: 1, медиана: 1, средноаритметично: 3; **б)** мода: 18, медиана: 23, средноаритметично: 35; **в)** мода: 11, медиана: 7, средноаритметично: $\frac{28}{5}$; **г)** мода: 5,50, медиана: 5,50, средноаритметично: 5,35.

**2.** Средноаритметично: 5,31; мода: 5,40; допълнителната оценка: 5,85. **3.** $x$ = 4,2 и $y$ = 5.

| 4. | средноаритметично | медиана |
|---|---|---|
| Плевен | 102 214 | 102 550 |
| София | 1 223 207 | 1 224 787 |

1.

## 31. ЦЕНТРАЛНИ ТЕНДЕНЦИИ. УПРАЖНЕНИЕ

**1. а)** Мода: няма, медиана: 7,15; **б)** Мода: $-\frac{1}{2}$, медиана: $\frac{1}{2}$. квартили: $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3$, мода: $-\frac{1}{2}$.

**2.** Мода: 950, медиана: 950, средноаритметично: 948,(3).

**3.** Средноаритметичното се увеличава с 10; модата се увеличава с 10; медианата се увеличава с 10.

**4.** $\boldsymbol{a} = 7$, $b = 4$.

## 32. СТАТИСТИКА И ОБРАБОТКА НА ДАННИ. ТЕМА ЗА САМОКОНТРОЛ

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Б | А | Б | В | Г | 20 | 5,70 | $a = 7$ |

**8.** Даденият ред е $11, -5, 25, -22, a, 17, 9$ и $s = \frac{11-5+25-22+a+17+9}{7} = \frac{a+35}{7}$ е средното му аритметично. Числата, подредени по големина, са $-22, -5, 9, 11, 17, 25$, от което следва, че медианата $m$ може да бъде едно от числата 9, 11 или $a$. По условие $m+s=15 \Leftrightarrow m = 15 - \frac{a+35}{7} = \frac{70-a}{7}$. Ако $m=9$ (тогава $a \leq 9$) и от $\frac{70-a}{7} = 9$ намираме $a = 7$. Ако $m = 11$ (тогава $a \geq 11$) и от $\frac{70-a}{7} = 11$ определяме $a = -7$, което е невъзможно. Ако $m = a$ (тогава $7 \leq a \leq 11$) от $\frac{70-a}{7} = a$ пресмятаме $8a = 70$ и $a = \frac{70}{9} \notin [9; 11]$. Следователно единствената възможна стойност е $a = 7$.

## 33. ТРИГОНОМЕТРИЧНИТЕ ФУНКЦИИ СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС ЗА ЪГЛИ В ИНТЕРВАЛА [0°; 180°]

**1.** а) не; б) не; в) да; г) да; д) не; е) да; ж) да; з) да.

**2.** а) 1; б) 0.

## 34. ОСНОВНИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ТЪЖДЕСТВА ЗА ЪГЛИ В ИНТЕРВАЛА [0°; 180°]

**1.** а) Тъй като $\text{tg}\alpha < 0$, то $\alpha \in (90°; 180°)$. От $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -2$ определяме $\sin\alpha = -2\cos\alpha$ и заместваме в основното тригонометрично тъждество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow 4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow 5\cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{5}.$$

Тогава $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ и $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

б) Тъй като $\cos\alpha < 0$, то $\alpha \in (90°; 180°)$.

От $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9} \Leftrightarrow \sin\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ и $\alpha \in (90°; 180°)$ следва, че $\cos\alpha > 0$ и $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Тогава $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

**2.** а) При $\alpha \neq 90°$: $1 + \text{tg}^2\alpha = 1 + \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

б) При $\alpha \neq 0°, 180°$: $1 + \text{cotg}^2\alpha = 1 + \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

## 35. ОСНОВНИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ТЪЖДЕСТВА ЗА ЪГЛИ В ИНТЕРВАЛА [0°; 180°]. УПРАЖНЕНИЕ

**1.** $\text{tg}\alpha.\text{cotg}(180° - \alpha) - \dfrac{\sin(90° - \alpha).\text{tg}^2\alpha}{1 + \cos\alpha} = \text{tg}\alpha.(-\text{cotg}\,\alpha) - \dfrac{\cancel{\cos\alpha}.\sin^2\alpha}{(1 + \cos\alpha)\cos^{\cancel{2}}\alpha} =$

$$= -1 - \frac{\sin^2\alpha}{(1 + \cos\alpha)\cos\alpha} = \frac{-\cos\alpha - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{(1 + \cos\alpha)\cos\alpha} = \frac{-\cancel{(1 + \cos\alpha)}}{\cancel{(1 + \cos\alpha)}\cos\alpha} = \frac{1}{-\cos\alpha} = \frac{1}{\cos(180° - \alpha)}$$

**2.** $A = \dfrac{\sin^3\alpha - \cos^3(180° - \alpha)}{\sin\alpha + \sin(90° - \alpha)} = \dfrac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} =$

$$= \frac{\cancel{(\sin\alpha + \cos\alpha)}(\sin^2\alpha - \sin\alpha.\cos\alpha + \cos^2\alpha)}{\cancel{\sin\alpha + \cos\alpha}} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin\alpha.\cos\alpha = 1 - \sin\alpha.\cos\alpha$$

**3.** а) $B = \dfrac{2\sqrt{6}}{25}$; б) $B = -\dfrac{2\sqrt{6}}{25}$; в) $B = \dfrac{2}{5}$;

г) Тъй като $\text{tg}\alpha < 0$, то $\alpha \in (90°; 180°)$. От $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -2$ определяме $\sin\alpha = -2\cos\alpha$ и заместваме в основното тригонометрично тъждество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow 4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow 5\cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{5}$.

Тогава $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ и $B = \sin\alpha.\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}.\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\dfrac{2}{5}$.

## 36. ТАБЛИЦА ЗА СТОЙНОСТИТЕ НА ТРИГОНОМЕТРИЧНИТЕ ФУНКЦИИ ОТ НЯКОИ СПЕЦИАЛНИ ЪГЛИ В ИНТЕРВАЛА [0°; 180°]

**1.** От това, че хипотенузата е два пъти по-голяма от един от катетите следва, че ъгълът срещу този катет е 30°, а срещу другия катет – 60°. Мерките на външните ъгли на триъгълника са 150°, 120° и 90° и $\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120° = -\frac{1}{2}$ и $\cos 90° = 0$.

**2.** При $\sphericalangle C = 30°$, то $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 75°$, а ако $\sphericalangle C = 150°$, то $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 15°$.

**3.** а) От $\cos 130° = \cos(180° - 50°) = -\cos 50°$ следва, че $\sin^2 50° + \cos^2 130° = \sin^2 50° + \cos^2 50° = 1$.

Тогава $A = \dfrac{4\sin 120°.\cos 135°}{\sin^2 50° + \cos^2 130°} = \dfrac{4.\frac{\sqrt{3}}{2}.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1} = -\sqrt{6}$.

б) От $\cos 170° = \cos(180° - 10°) = -\cos 10°$ следва, че $\cos 10° + \cos 170° = \cos 10° - \cos 10° = 0$.

Тогава $B = \dfrac{\sqrt{2} + \cos 10° + \cos 170°}{4\cos 120°.\sin 135°} = \dfrac{\sqrt{2} + 0}{4\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1$.

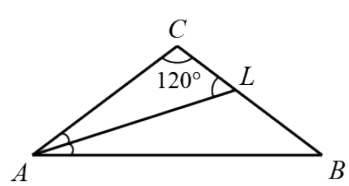
в) При $\alpha = 30°$ $C = \dfrac{\sqrt{\sin 3\alpha} - \sqrt{\sin 5\alpha}}{\sqrt{\cos 3\alpha} + \sqrt{-\cos 4\alpha}} = \dfrac{\sqrt{\sin 90°} - \sqrt{\sin 150°}}{\sqrt{\cos 90°} + \sqrt{-\cos 120°}} =$

$$= \frac{\sqrt{1} - \sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{0} + \sqrt{-\left(-\frac{1}{2}\right)}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

## 37. СИНУСОВА ТЕОРЕМА

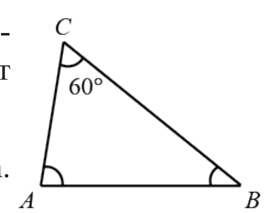
**1.** От $\sphericalangle ACB = 120°$ и $AL$ – ъглополовяща в равнобедрения $\Delta ABC$ следва, че $\sphericalangle BAC = 30°$, $\sphericalangle LAC = 15°$ и $\sphericalangle ALC = 45°$.

Прилагаме синусовата теорема за $\Delta ALC$:




$$\frac{AL}{\sin\sphericalangle ACL} = \frac{AC}{\sin\sphericalangle ALC} \Leftrightarrow AL = \frac{AC.\sin 120°}{\sin 45°} = \frac{12.\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{6} \text{ cm}.$$

**2.** Нека в $\Delta ABC$ $\sphericalangle A = 83°$, $\sphericalangle B = 37°$, а $R = 10\sqrt{3}$ cm е радиусът на описаната около триъгълника окръжност. Тогава $\sphericalangle C = 180° - (\sphericalangle A + \sphericalangle B) = 180° - (83° + 37°) = 60°$ е средният по-големина ъгъл, а $AB$ е средната по големина страна.




От синусовата теорема намираме: $AB = 2R\sin\sphericalangle C = 2.10\sqrt{3}.\sin 60° = 2.10\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 30$ cm.

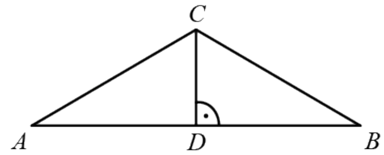
**3.** Нека в остроъгълния $\Delta ABC$ $\sphericalangle BAC = \alpha$, $0° < \alpha < 90°$.

От синусовата теорема намираме $\dfrac{BC}{\sin\alpha} = 2R \Leftrightarrow \sin\alpha = \dfrac{BC}{2R} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2.2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\alpha = 60°$.

**4.** Прилагаме синусовата теорема в $\Delta ABC$:

$\dfrac{AB}{\sin\sphericalangle C} = 2R \Leftrightarrow \sin\sphericalangle C = \dfrac{AB}{2R} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2}$. Тогава $\sphericalangle C = 30°$ или $\sphericalangle C = 150°$. Но по условие $AB$ е най-голямата страна в триъгълника, от което следва, че $\sphericalangle C = 150°$.

## 38. РЕШАВАНЕ НА ПРОИЗВОЛЕН ТРИЪГЪЛНИК С ПОМОЩТА НА СИНУСОВАТА ТЕОРЕМА

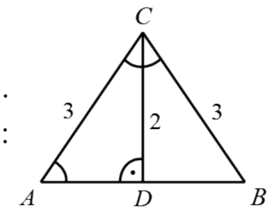



**1.** По условие $CD=\dfrac{1}{2}AC$. В правоъгълния $\Delta ADC$ $\sin\sphericalangle A=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{1}{2}$.

Тогава $\sphericalangle A = 30° = \sphericalangle B$ и $\sphericalangle ACB = 120°$.

От синусовата теорема за $\Delta ABC$ намираме $AC=BC=2R\sin 30°=2.2.\dfrac{1}{2}=2$ cm и

$AB=2R\sin 120°=2.2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ cm.

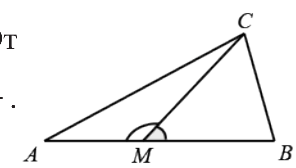



**2.** В правоъгълния $\Delta ADC$ $\sin\sphericalangle A=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{2}{3}$, $AD^2 = AC^2 - CD^2 = 9 - 4 = 5$ и $AD=\sqrt{5}$.
Тогава $AB=2AD=2\sqrt{5}$ и от синусовата теорема за $\Delta ABC$ намираме:
$\dfrac{BC}{\sin\sphericalangle A}=2R \Leftrightarrow R=\dfrac{3.3}{2.2}=\dfrac{9}{4}$ и $\dfrac{AB}{\sin\sphericalangle ACB}=2R \Leftrightarrow \sin\sphericalangle ACB=\dfrac{AB}{2R}=\dfrac{2\sqrt{5}.4}{2.9}=\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$.

**3.** Нека $R$ и $R_1$ са радиусите на описаните окръжности съответно около $\Delta ABC$ и $\Delta AIB$. Точката $I$ е пресечна точка на ъглополовящите в $\Delta ABC$ и $\sphericalangle AIB=90°+\dfrac{\sphericalangle C}{2}=90°+30°=120°$.

Тогава $\dfrac{AB}{\sin 60°}=2R \Leftrightarrow R=\dfrac{5}{2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ cm и $\dfrac{AB}{\sin 120°}=2R_1 \Leftrightarrow R_1=\dfrac{5}{2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ cm.

## 39. РЕШАВАНЕ НА ПРОИЗВОЛЕН ТРИЪГЪЛНИК С ПОМОЩТА НА СИНУСОВАТА ТЕОРЕМА. УПРАЖНЕНИЕ



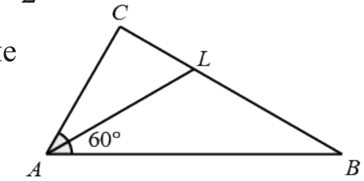

**1.** Нека $R=17\sqrt{2}$ cm е радиусът на описаната около $\Delta ABC$ окръжност, а $\sphericalangle BAC = \alpha$. От тъждеството $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ намираме $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\dfrac{16}{17}=\dfrac{1}{17}$ и $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$.

От синусовата теорема следва, че $BC=2R\sin\alpha=2.17\sqrt{2}.\dfrac{1}{\sqrt{17}}=2\sqrt{34}$ cm.

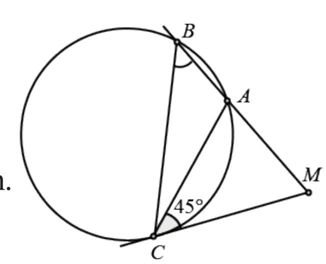
**2.** От синусовата теорема за $\Delta BMC$ намираме $BC = 2R_{\Delta BMC}\sin\sphericalangle BMC = 2.10.0{,}6 = 12$ cm.
От $\sphericalangle AMC = 180° - \sphericalangle BMC$ следва, че $\sin\sphericalangle AMC = \sin\sphericalangle BMC = 0{,}6$.

Тогава в $\Delta AMC$ $AC = 2R_{\Delta AMC}\sin\sphericalangle AMC = 2.15.0{,}6 = 18$ cm.

**3.** От синусовата теорема намираме: $\dfrac{BC}{\sin 60°}=2R \Leftrightarrow BC=2R.\sin 60°=2.8\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=24$ cm.




По условие $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{1}{2}$ и от $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CL}{BL}$ (свойство на ъглополовящата $AL$) следва, че $\dfrac{CL}{BL}=\dfrac{1}{2}$ и $CL=\dfrac{1}{3}.24=8$ cm.

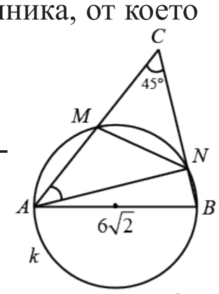



**4.** От $\sphericalangle MCA=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ (периферен ъгъл) и $\sphericalangle ABC=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ (вписан ъгъл) следва, че $\sphericalangle ABC = 45°$.

От синусовата теорема за $\Delta ABC$ намираме: $\dfrac{AC}{\sin 45°}=2R \Leftrightarrow AC=2.10.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{2}$ cm.

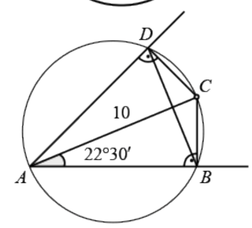
**5.** Прилагаме синусовата теорема в $\Delta ABC$: $\dfrac{BC}{\sin\sphericalangle BAC}=d \iff \sin\sphericalangle BAC=\dfrac{BC}{d}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Тогава $\sphericalangle BAC = 45°$ или $\sphericalangle BAC = 135°$. Но по условие $BC$ е най-голямата страна в триъгълника, от което следва, че $\sphericalangle BAC = 135°$.




**6.** От $N \in k$ следва, че $\sphericalangle ANB = 90°$. Тогава в $\Delta ANC$ $\sphericalangle NAC = 90° - \sphericalangle ACN = 45°$. От синусовата теорема за $\Delta AMN$ намираме:

$$MN = AB.\sin\sphericalangle MAN = 6\sqrt{2}.\sin 45° = 6\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 6 \text{ cm}.$$



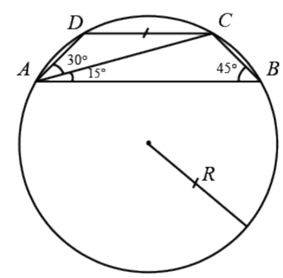

**7.** От $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 90°$ следва, че точките $A$, $B$, $C$ и $D$ лежат на една окръжност с диаметър $AC = 10$ cm.

Тъй като точката $C$ се намира на равни разстояния от правите $AB$ и $AD$, то $AC$ е ъглополовяща на $\sphericalangle BAD$.

Тогава $\sphericalangle BAD = 2\sphericalangle BAC = 45°$.

От синусовата теорема за $\Delta ABD$ намираме: $BD = 2R\sin 45° = 10.\sin 45° = 10.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$ cm.

**8.** Ще докажем, че $\sphericalangle CAD = 30°$.




*I начин.* От $CD = R$ следва, че $\overset{\frown}{CD} = 60°$ и $\sphericalangle CAD = \dfrac{1}{2}<.\overset{\frown}{CD} = 30°$.

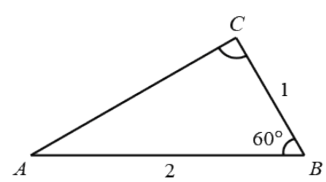
*II начин.* От синусовата теорема за $\Delta ACD$ следва, че

$$\frac{CD}{\sin\sphericalangle CAD} = 2R \iff \sin\sphericalangle CAD = \frac{CD}{2R} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \text{ и } \sphericalangle CAD = 30°.$$

Тогава $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD = 45°$ и прилагаме синусовата теорема за $\Delta ABC$:

$$\frac{AC}{\sin 45°} = 2R \iff AC = 2R\sin 45° = 2R.\frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}.$$

## 40. КОСИНУСОВА ТЕОРЕМА




**1.** От косинусовата теорема за страната $AC$ намираме:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos 60° = 4+1-2.2.1.\frac{1}{2} = 3 \text{ и } AC = \sqrt{3} \text{ cm}.$$

Мярката на $\sphericalangle C$ може да намерим от косинусовата теорема:

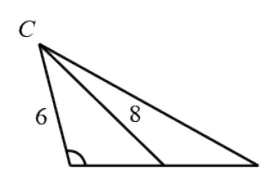
$$\cos\sphericalangle C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC.BC} = \frac{3+1-4}{2.\sqrt{3}.1} = 0 \text{ и } \sphericalangle C = 90°;$$

или от синусовата теорема:

$$\frac{AB}{\sin\sphericalangle C} = \frac{AC}{\sin\sphericalangle B} \iff \sin\sphericalangle C = \frac{AB.\sin\sphericalangle B}{AC} = \frac{2.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.2} = 1 \text{ и } \sphericalangle C = 90°;$$

или от обратната теорема на Питагор:

от $AC^2 + BC^2 = AB^2$ следва, че $\sphericalangle C = 90°$.

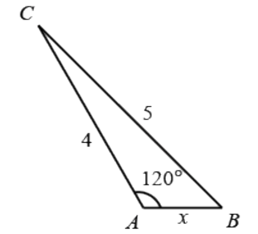



**2.** От косинусовата теорема в $\Delta AMC$ и $\Delta ABC$ последователно намираме:

$$\cos\sphericalangle A = \frac{AM^2 + AC^2 - CM^2}{2AM.AC} = \frac{16+36-64}{2.4.6} = -\frac{1}{4};$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\sphericalangle A = 81+36+2.9.6.\frac{1}{4} = 144 \text{ и } BC = 12 \text{ cm}.$$

**3.** Нека $AB = x$. От косинусовата теорема за страната $BC$ намираме:

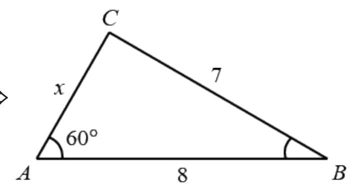



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120° \Leftrightarrow 25 = x^2 + 16 - 2x.4.\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 9 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{13}.$$

От $x > 0$ следва, че $AB = -2 + \sqrt{13} = \left(\sqrt{13} - 2\right)$ cm.

## 41. РЕШАВАНЕ НА ПРОИЗВОЛЕН ТРИЪГЪЛНИК С ПОМОЩТА НА КОСИНУСОВА ТЕОРЕМА

**1.** Означаваме $AC = x$ и прилагаме косинусовата теорема за страната $BC$:




$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 60° \Leftrightarrow \Leftrightarrow 49 = 64 + x^2 - 2.8x.\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 3,\ x_2 = 5.$$

При $x = 3$ $\Delta ABC$ е тъпоъгълен (тогава $AB^2 > AC^2 + BC^2 \Leftrightarrow 64 > 9 + 49$), а при $x = 3$ триъгълникът е остроъгълен ($AB^2 < AC^2 + BC^2 \Leftrightarrow 64 < 25 + 49$).

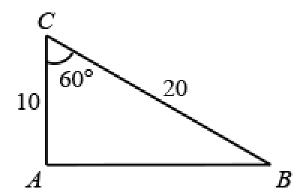
Следователно $AC = 5$ cm.

**2.** Нека в $\Delta ABC$ $AC = \sqrt{3}$, $BC = 1$ и $\sphericalangle C = 30°$. От косинусовата теорема получаваме

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC.AC.\cos 30° = 1 + 3 - 2.1.\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 1$ и $AB = 1$. От $AB = BC = 1$ следва, че

$\sphericalangle A = \sphericalangle C = 30°$ и $\sphericalangle B = 120°$. Следователно $\Delta ABC$ е равнобедрен и тъпоъгълен (отг. А).

**3.** *I начин*. Нека в $\Delta ABC$ $AC = 10$ cm, $BC = 20$ cm, $\sphericalangle C = 60°$, а $R$ е радиусът на описаната около триъгълника окръжност. Прилагаме последователно косинусовата и синусовата теорема за страната $AB$:




$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos 60° = 100 + 400 - 2.10.20.\frac{1}{2} = 300,$$

$$AB = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \text{ cm и } \frac{AB}{\sin \sphericalangle C} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{AB}{2\sin 60°} = \frac{10\sqrt{3}}{2.\frac{\sqrt{3}}{2}} = 10 \text{ cm (отг. В).}$$

*II начин.* Нека $M$ е средата на $BC$.

Тогава $CM = MB = 10$ cm, $\Delta AMC$ е равностранен ($AC = CM$ и $\sphericalangle C = 60°$) и $AM = 10$. В $\Delta ABC$ $AM$ е медиана и от $AM = \frac{1}{2}BC$ следва, че $\sphericalangle BAC = 90°$ и $R = \frac{BC}{2} = 10$ cm. (отг. В).

**4.** а) $c = 7$ cm; б) $c = 14$ cm; в) $c = \sqrt{5}$ cm; г) $c = 2\sqrt{5}$ cm.

**5.** а) $\alpha = 60°$; б) $\alpha = 90°$; в) $\alpha = 30°$; г) $\alpha = 45°$.

## 42. РЕШАВАНЕ НА ПРОИЗВОЛЕН ТРИЪГЪЛНИК С ПОМОЩТА НА КОСИНУСОВАТА ТЕОРЕМА. УПРАЖНЕНИЕ

**1.** Означаваме страните на триъгълника с $a = 2x - 2$, $b = 2x$, $c = 2x + 2$, където $x > 1$ е цяло число.

От неравенството на триъгълника $a + b > c$ намираме: $2x - 2 + 2x > 2x + 2 \Leftrightarrow x > 2$.

Като вземем предвид, че $a < b < c$, триъгълникът ще е тъпоъгълен тогава и само тогава, когато $a^2 + b^2 < c^2 \Leftrightarrow (2x - 2)^2 + 4x^2 < (2x + 2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 < x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x < 0$.

Решенията на последното неравенство са $0 < x < 4$.

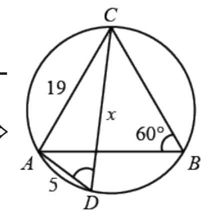
Но от $x > 2$ следва, че търсеното число е от интервала $2 < x < 4$.

Единственото цяло число в този интервал е $x = 3$.

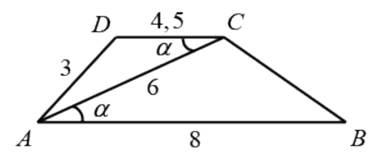
Страните на триъгълника са $a = 4$, $b = 6$, $c = 8$.

Най-големият ъгъл на този триъгълник е срещу най-голямата страна $c = 8$.

Следователно $\cos\sphericalangle C = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2.AC.BC} = \dfrac{4^2 + 6^2 - 8^2}{2.4.6} = \dfrac{16+36-64}{4.12} = -\dfrac{1}{4}$.




**2.** Нека $CD = x$. От $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC = 60°$ (вписани ъгли) и косинусовата теорема за $\Delta ADC$ намираме: $AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2CD.AD.\cos 60° \Leftrightarrow 19^2 = x^2 + 5^2 - 2x.5.\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 5x - 336 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_1 = 21,\ x_2 = -16$.
Следователно $CD = 21$ cm (отг. В).



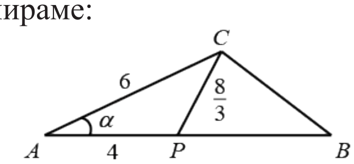

**3.** Да означим $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD = \alpha$ (кръстни ъгли). От $\Delta ACD$ намираме:

$$\cos\alpha = \frac{AC^2 + CD^2 - AD^2}{2AC.CD} = \frac{36 + 20,25 - 9}{2.6.4,5} = \frac{47,25}{54}.$$

Прилагаме косинусовата теорема за страната $BC$ в $\Delta ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\alpha = 64 + 36 - 2.8.6.\frac{47,25}{54} = 100 - \frac{756}{9} = \frac{144}{9} = 16,\ BC = 4 \text{ cm}.$$

Тогава $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 8 + 4 + 4,5 + 3 = 19,5$ cm.

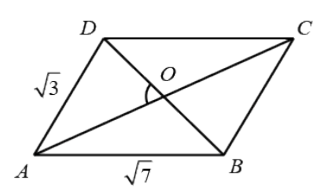



**4.** Нека $\sphericalangle A = \alpha$ и от косинусовата теорема за $\Delta APC$ и $\Delta ABC$ последователно намираме:

$$\cos\alpha = \frac{AP^2 + AC^2 - CP^2}{2AP.AC} = \frac{16 + 36 - \frac{64}{9}}{2.4.6} = \frac{101}{108};$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\alpha = 81 + 36 - 2.9.6.\frac{101}{108} = 117 - 106 = 16 \text{ и } BC = 4 \text{ cm}.$$

## 43. ФОРМУЛИ ЗА МЕДИАНИ НА ТРИЪГЪЛНИК. ФОРМУЛИ ЗА ЪГЛОПОЛОВЯЩИ НА ТРИЪГЪЛНИК

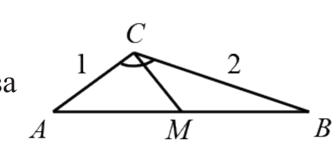



**1.** От $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AC^2$ намираме

$AC^2 = 2.7 + 2.3 - 4 = 16$ и $AC = 4$ cm.

В $\Delta AOD$ със страни $AD = \sqrt{3}\,cm$, $AO = 2$ cm, $DO = 1$ cm. пресмятаме

$$\cos\sphericalangle AOD = \frac{AO^2 + DO^2 - AD^2}{2AO.DO} = \frac{4+1-3}{2.2.1} = \frac{1}{2} \text{ и следователно } \sphericalangle AOD = 60°.$$

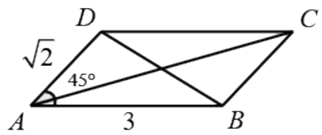



**2.** От косинусовата теорема в $\Delta ABC$ намираме
$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos 120° = 1 + 4 + 2.1.2.\dfrac{1}{2} = 7$ и $AB = \sqrt{7}$. Тогава за дължината на медианата $CM$ получаваме:

$$4CM^2 = 2AC^2 + 2BC^2 - AB^2 = 2.1 + 2.4 - 7 = 3,\ CM^2 = \frac{3}{4} \text{ и } CM = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}.$$

**3.** $m_a = 8,5\,\text{cm};\ m_b = 6,5\,\text{cm};\ m_c = \sqrt{85}\,\text{cm}$.

**4.** $l_a = 90\dfrac{\sqrt{14}}{11}$ cm; $l_b = 18\sqrt{2}$ cm; $l_c = 20$ cm .




**5.** Прилагаме косинусовата теорема за $\Delta ABD$:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos 45° = 9 + 2 - 2.3.\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 5$ и $BD = \sqrt{5}$ cm.

От равенството $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$ намираме $AC^2 = 2.9 + 2.2 - 5 = 17$ и $AC = \sqrt{17}$ cm.

## 44. ФОРМУЛИ ЗА МЕДИАНИ НА ТРИЪГЪЛНИК. ФОРМУЛИ ЗА ЪГЛОПОЛОВЯЩИ НА ТРИЪГЪЛНИК. УПРАЖНЕНИЕ

**1.** Медиани: 17 cm; 13 cm; $2\sqrt{85}$ cm и ъглополовяща $\dfrac{48\sqrt{21}}{17}$ cm.

**2.** Страни: 13 cm; 19 cm и 22 cm и ъглополовяща $\dfrac{24}{35}\sqrt{429}$ cm.

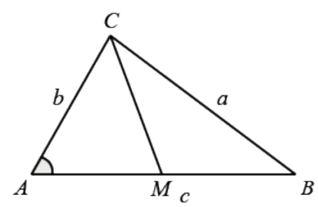
**3.** а) От $(a + b)(a - b) = c(c - b) \Leftrightarrow a^2 - b^2 = c^2 - bc \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc$

и от косинусова теорема за страната $BC$ на $\Delta ABC$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\sphericalangle A$ следва, че $\cos\sphericalangle A = \dfrac{1}{2}$ и $\sphericalangle A = 90°$.

б) Заместваме $a = 3\sqrt{3}$ и $b = 3$ в равенството $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ и получаваме:

$27 = 9 + c^2 - 3c \Leftrightarrow c^2 - 3c - 18 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 6,\ c_2 = -3$. Следователно $AB = 6$ cm.

За медианата $CM$ към страната $AB$ намираме:




$CM = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2.27 + 2.9 - 36} = \dfrac{1}{2}\sqrt{36} = \dfrac{6}{2} = 3$ cm.

**4.** $AC = 15$ cm; $l_b = \dfrac{8}{9}\sqrt{154}$ cm; $\cos\sphericalangle(m_b; l_b) \approx 0{,}99$.

## 45. ФОРМУЛИ ЗА ЛИЦЕ НА ТРИЪГЪЛНИК

**1.** а) $20\sqrt{3}$ cm$^2$; б) 54 cm$^2$; в) 6 cm$^2$.

**2.** а) $25\sqrt{3}$ cm$^2$; б) $12\sqrt{3}$ cm$^2$; в) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ cm$^2$.

**3.** а) $S = 10\sqrt{3}$ cm$^2$; $h_b = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ cm; $r = \sqrt{3}$ cm; $R = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$ cm ;

б) $S = 84$ cm$^2$; $h_b = \dfrac{56}{15}$ cm; $r = 4$ cm; $R = \dfrac{65}{8}$ cm .

**4.** При $a = 5$, $b = 6$ и $c = 7$ пресмятаме $p = \dfrac{a+b+c}{2} = 9$ и

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9.4.3.2} = \sqrt{6^2.6} = 6\sqrt{6}$ cm$^2$. От $S = pr$ намираме $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{6\sqrt{6}}{9} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ cm.

Лицето на вписания в триъгълника кръг е $S_{\text{кръг}} = \pi r^2 = \pi\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \dfrac{4.6\pi}{9} = \dfrac{8\pi}{3}$ cm$^2$

## 46. ФОРМУЛИ ЗА ЛИЦЕ НА ТРИЪГЪЛНИК. УПРАЖНЕНИЕ

**1.** При $a = 4$, $b = 5$ и $c = 7$ пресмятаме $p = \dfrac{a+b+c}{2} = 8$ cm и

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{8.4.3.1} = \sqrt{4^2.6} = 4\sqrt{6}$ cm$^2$.

От $S = \dfrac{ah_a}{2} = \dfrac{bh_b}{2} = \dfrac{ch_c}{2}$ намираме $h_a = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{2.4\sqrt{6}}{4} = 2\sqrt{6}$ cm, $h_b = \dfrac{2S}{b} = \dfrac{2.4\sqrt{6}}{5} = \dfrac{8\sqrt{6}}{5}$ cm и

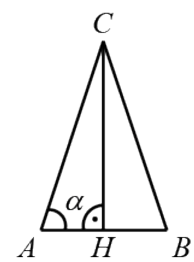
$h_c = \dfrac{2S}{c} = \dfrac{2.4\sqrt{6}}{7} = \dfrac{8\sqrt{6}}{7}$ cm.

**2.** При $a = 5$, $b = 7$ и $c = 8$ пресмятаме $p = \dfrac{a+b+c}{2} = 10$ и

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{10.5.3.2} = \sqrt{10^2.3} = 10\sqrt{3}$ cm$^2$.

От $S = \dfrac{abc}{4R}$ намираме $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{5.7.8}{4.10\sqrt{3}} = \dfrac{7}{\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$ cm.

Дължината на описаната около триъгълника окръжност е $l = 2\pi R = 2\pi\dfrac{7\sqrt{3}}{3} = \dfrac{14\sqrt{3}\pi}{3}$ cm.




**3.** Построяваме височината $CH$ и означаваме $\sphericalangle BAC = \alpha$.

От тъждеството $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ намираме $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$ и $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$.

*I начин.* Пресмятаме $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{4}{3}$ и от правоъгълния $\Delta AHC$ определяме

$CH = AH.\operatorname{tg}\alpha = 6.\dfrac{4}{3} = 8$ cm.

Тогава $S_{ABC} = \dfrac{AB.CH}{2} = \dfrac{12.8}{2} = 48$ cm$^2$ .

*II начин.* В правоъгълния $\Delta AHC$ $\dfrac{AH}{AC} = \cos\alpha \Leftrightarrow AC = \dfrac{AH}{\cos\alpha} = \dfrac{6.5}{3} = 10$ cm.

Тогава $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\alpha = \dfrac{1}{2}.12.10.\dfrac{4}{5} = 48$ cm$^2$.

**4.** $C = \dfrac{14\sqrt{3}}{3}.\pi$.

## 47. РЕШАВАНЕ НА ТРИЪГЪЛНИК. ТЕМА ЗА САМОКОНТРОЛ

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Б | Б | В | В | А | $A = \dfrac{4}{15}$ | $CL = \dfrac{8}{3}$ | $S = 54\sqrt{3}$ |

**8.** От $AC = 3CD = 18$ и $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle CAB$ следва, че $AD = 12$, $CD = 6$ и $AD = BD = 12$.

От $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{12}{6} = 2$ ($BD$ е ъглополовяща) означаваме $BC = x$, $AB = 2x$, а от равенството

$BD^2 = AB.BC - AD.CD \Leftrightarrow 144 = 2x^2 - 12.6$ намираме $x^2 = 108$ и $x = 6\sqrt{3}$ .

Лицето на $\Delta ABC$ със страни $a=6\sqrt{3}$, $b=18$ и $c=12\sqrt{3}$ намираме по Хероновата формула: $p=9\sqrt{3}+9$ и

$$S=\sqrt{\left(9\sqrt{3}+9\right)\left(3\sqrt{3}+9\right)\left(9\sqrt{3}-9\right)\left(9-3\sqrt{3}\right)}=$$

$$=9.3\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}+3\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}=9.3\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}=$$

$$=27\sqrt{\left[\left(\sqrt{3}\right)^2-1\right]\left[3^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right]}=27\sqrt{2.6}=54\sqrt{3}.$$

*Забележка.* Стойността на $x$ може да получим и от равенството $\frac{BC}{AC}=\frac{CD}{BC}\Leftrightarrow\frac{x}{18}=\frac{6}{x}$, което следва от $\Delta BDC\sim\Delta ABC$.

## 48. АКСИОМИ ЗА ТОЧКИТЕ, ПРАВИТЕ И РАВНИНИТЕ В ПРОСТРАНСТВОТО. ВЗАИМНО ПОЛОЖЕНИЕ НА ДВЕ ПРАВИ

**1.** Ако трите точки не лежат на една права, според една от аксиомите следва, че през тях минава точно една равнина.

Ако точките са от една права, то през тях (и през правата) могат да минат безброй равнини.

**2.** а) Точките трябва да лежат на една права. В противен случай може да мине точно една равнина (ако точно три от тези точки са от една права или са върхове на четириъгълник) или да не лежат в една равнина (ако са върхове на тетраедър).

б) Точките ще са в една равнина, ако точно три от тях лежат на една права, или ако четирите са върхове на четириъгълник.

**3.** През две точки могат да минат безброй равнини.

През три върха на куб може да мине единствена равнина, тъй като върховете не лежат на една права.

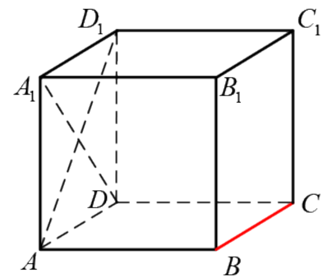
Тъй като всеки два околни ръба на пирамида се пресичат във върха на пирамидата, то през тях минава единствена равнина.

Отговор: (2) и (3).

**4.** а) Ако две прави лежат в една равнина, те са пресекателни или успоредни.

б) Ако правите нямат общи точки, то те са успоредни или кръстосани.

**5.** Щом правите са от една равнина, то те са пресекателни или успоредни.



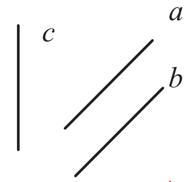

**6.** Правата $BC$ пресича $CC_1$ в точка $C$ и е успоредна на $C_1C_1$, тъй като от $BC\|AD$ и $AD\|A_1D_1$ следва, че $BC\|A_1D_1$.

Правата $BC$ е кръстосана с правите $AD_1$ и $AD_1$, защото $BC$ лежи в равнината $(ABCD)$, а $AD_1$ и $AD_1$ я пресичат в точки, нележащи на $BC$. Аналогично, $BC$ е кръстосана с $C_1D_1$ тъй като $BC$ лежи в равнината $(BCC_1B_1)$, а $C_1D_1$ я пресича в точка $C_1\notin BC$.

## 49. ЪГЪЛ МЕЖДУ ДВЕ ПРАВИ В ПРОСТРАНСТВОТО

**1.** От условието следва, че $a$ и $b$ са кръстосани или пресекателни. Това означава, че $a \nparallel b$ и $\sphericalangle(a, b) \neq 0$.

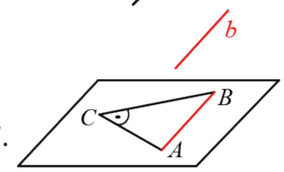
**2.** Нека $a$, $b$ и $c$ са прави, за които $c \perp a$ и $a \| b$. От определението за ъгъл между две прави следва, че $\sphericalangle(c, b) = \sphericalangle(c, a) = 90°$ и $c \perp b$.




**3.** От $b \| AB$ следва, че $\sphericalangle(b, AB) = 0°$.

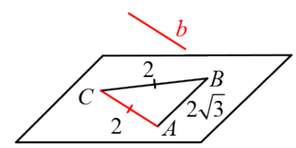
В правоъгълния $\Delta ABC$ от $\operatorname{tg} \sphericalangle A = \dfrac{BC}{AC} = \sqrt{3}$ следва, че $\sphericalangle A = 60°$. Тогава $\sphericalangle B = 30°$.

От $b \| AB$ следва, че $\sphericalangle(b, AC) = \sphericalangle(AB, AC) = \sphericalangle A = 60°$ и $\sphericalangle(b, BC) = \sphericalangle(AB, BC) = \sphericalangle B = 30°$.




**4.** Построяваме височината $CH$ ($H \in AB$) и от $\Delta AHC$ определяме $\cos \sphericalangle A = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sphericalangle A = 30°$.

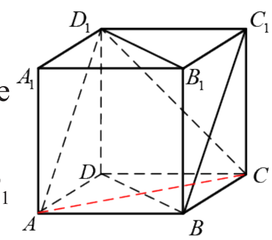
Тогава $\sphericalangle ACB = 120°$ и от $b \| AC$ следва, че $\sphericalangle(b, AB) = \sphericalangle(AC, AB) = 30°$ и $\sphericalangle(b, BC) = \sphericalangle(AC, BC) = 60°$ (съседния ъгъл на $\sphericalangle ACB$).




**5.** От $B_1C_1 \| BC$ следва, че $\sphericalangle(AC, B_1C_1) = \sphericalangle(AC, BC) = 45°$.

Като вземем предвид, че ръбовете $BB_1$, $CC_1$ и $DD_1$ са успоредни и равни, то $BDD_1B_1$ е успоредник и $BD \| B_1D_1$. Аналогично се доказва, че $BC_1 \| AD_1$.

Тогава $\sphericalangle(AC, B_1D_1) = \sphericalangle(AC, BD) = 90°$ и $\sphericalangle(AC, BC_1) = \sphericalangle(BC, AD_1) = 60°$, тъй като $\Delta ACD_1$ е равностранен ($AC$, $AD_1$ и $CD_1$ са диагонали в еднакви квадрати).

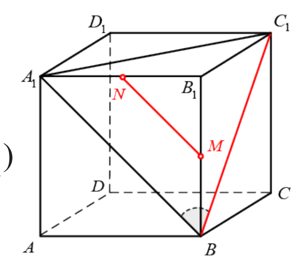



**6.** В $\Delta A_1BB_1$ $MN$ е средна отсечка и $MN \| A_1B$.

Тогава $\sphericalangle(MN, BC_1) = \sphericalangle(A_1B, BC_1) = \sphericalangle A_1BC_1$.

От $A_1B = BC_1 = A_1C_1$ (диагонали в еднаквите квадрати $ABB_1A_1$, $BCC_1B_1$ и $A_1B_1C_1D_1$) следва, че $\Delta A_1BC_1$ е равностранен и $\sphericalangle A_1BC_1 = 60°$.

Следователно $\sphericalangle(MN, BC_1) = 60°$.

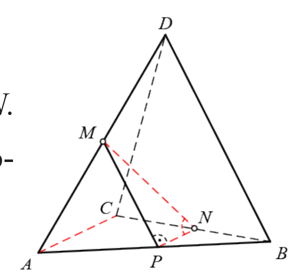



**7*.** Нека $P$ е средата на $AB$.
Тогава $PM$ и $PN$ са средни отсечки съответно в $\Delta ABD$ и $\Delta ABC$, $PM \| BD$, $PN \| AC$,

$PN = \dfrac{AC}{2}$, $PM = \dfrac{BD}{2}$, $\sphericalangle(AC, MN) = \sphericalangle(PN, MN) = \sphericalangle PNM$ и $\sphericalangle(AC, BD) = \sphericalangle(PN, PM) = \sphericalangle MPN$.

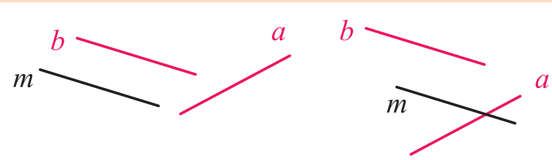
От $AC \perp BD$ и $AC = BD$ следва, че $\sphericalangle NPM = 90°$, $PN = PM$, $\Delta MPN$ е равнобедрен правоъгълен и $\sphericalangle PNM = 45°$.

Следователно $\sphericalangle(MN, AC) = 45°$.

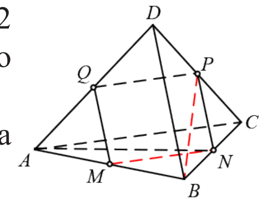



## 50. АКСИОМИ ЗА ТОЧКИТЕ, ПРАВИТЕ И РАВНИНИТЕ В ПРОСТРАНСТВОТО. ВЗАИМНО ПОЛОЖЕНИЕ НА ДВЕ ПРАВИ. ЪГЪЛ МЕЖДУ ДВЕ ПРАВИ В ПРОСТРАНСТВОТО. УПРАЖНЕНИЕ

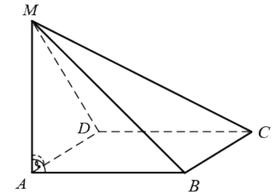
**1.** Правата $m$ не може да е успоредна на $a$. Ако допуснем, че $m \| a$, от $m \| b$ ще следва, че $b \| a$, което противоречи на условието, че $a$ и $b$ са кръстосани.
Следователно правите $a$ и $m$ са пресекателни или кръстосани.



**2.** Точките $M$, $N$, $P$ и $Q$ лежат в една равнина, тъй като $MNPQ$ е успоредник (вж. задача 2 от урока) и твърденията от А) и Б) са неверни. Равенството $MN = NP$ от Г) е възможно само, ако $AC = BD$.



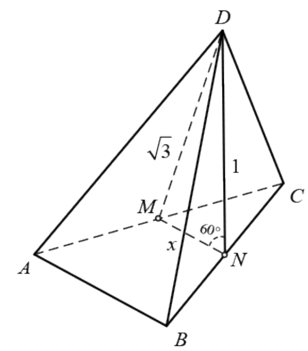

Правите $AN$ и $BP$ са кръстосани, тъй като $AN$ е права от равнината $(ABC)$, а $BP$ пресича тази равнина в точка $B \notin AN$. Верният отговор е В).




**3.** От $AB \| CD$ и $AB \perp MA$ следва, че $CD \perp MA$ и $\sphericalangle(MA, CD) = 90°$.

От $MA \perp AD$, $MA = AB$ и $AD = AB$ следва, че $\Delta MAD$ е правоъгълен и равнобедрен и $\sphericalangle ADM = 45°$.

Като вземем предвид, че $BC \| AD$, то $\sphericalangle(BC, MD) = \sphericalangle(AD, MD) = \sphericalangle ADM$ и $\sphericalangle(BC, MD) = 45°$.



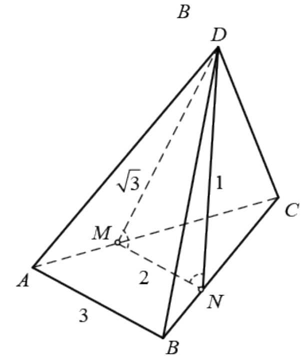

**4.** В $\Delta ABC$ $MN$ е средна отсечка, $MN \| AB$ и $MN = \dfrac{1}{2}AB$.

Тогава $\sphericalangle(AB, ND) = \sphericalangle(MN, ND) = \sphericalangle MND = 60°$.

Означаваме $MN = x$ и от косинусовата теорема в $\Delta MND$ намираме:

$MD^2 = MN^2 + ND^2 - 2MN.ND.\cos 60° \Leftrightarrow 3 = x^2 + 1 - 2x.1.\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$

Следователно $MN = 2$ cm и $AB = 2MN = 4$ cm.




**5.** В $\Delta ABC$ от $AM : MC = BN : NC$ и обратната теорема на Талес следва, че $MN \| AB$.

Тогава $\sphericalangle(AB, MD) = \sphericalangle(MN, MD) = \sphericalangle NMD$ и $\sphericalangle(AB, ND) = \sphericalangle(MN, ND) = \sphericalangle MND$.

От $MN \| AB$ следва, че $\Delta MNC \sim \Delta ABC$, $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{2}{3}$ и $MN = \dfrac{2}{3}AB = 2$.

От $MN^2 = MD^2 + ND^2 \Leftrightarrow 2^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2$ следва, че $\sphericalangle MDN = 90°$ и $\sphericalangle NMD = 30°$,

тъй като $ND = \dfrac{1}{2}MN$. Тогава $\sphericalangle MND = 60°$.

Следователно $\sphericalangle(AB, MD) = 30°$, $\sphericalangle(AB, ND) = 60°$.

## 51. ВЗАИМНО ПОЛОЖЕНИЕ НА ПРАВА И РАВНИНА. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТ НА ПРАВА И РАВНИНА

**1.** Тъй като правата няма общи точки с равнината, то с правите от равнината тя е или успоредна или кръстосана.

**2.** Невъзможното твърдение е това от подточка в) $a$ е перпендикулярна на α. Ако допуснем, че $a \perp \alpha$, то от $b \perp \alpha$ следва, че $a \| b$, което е невъзможно, тъй като по условие $a \perp b$.

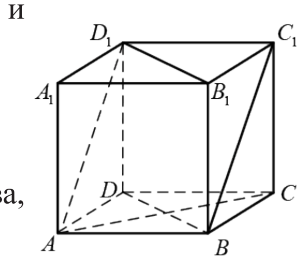
**3.** Верният отговор е В), тъй като от $b \| a$ и $a \perp \alpha$ следва, че $b \perp \alpha$.

**4.** а) От $A_1B_1 \| AB$ и следва, че $A_1B_1 \| (ABCD)$.

От $AB \| CD \| C_1D_1$ и $AB = CD = C_1D_1$ (срещуположни страни в квадратите $ABCD$ и $CDD_1C_1$) следва, че $ABC_1D_1$ е успоредник,

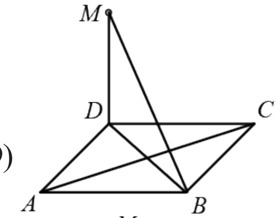
$BC_1 \| AD_1$ и $BC_1 \| (ADD_1A_1)$, тъй като $AD_1 \subset (ADD_1A_1)$.

б) От $AA_1 \perp AB$ и $AA_1 \perp AD$ следва, че $AA_1 \perp (ABCD)$ и $AA_1 \perp BD$, тъй като $BD \subset (ABCD)$.



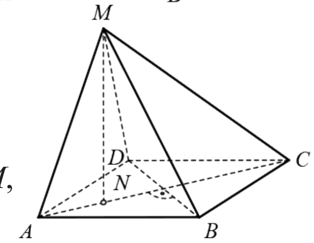

в) От $AC \perp BD$ (диагонали в квадрата $ABCD$) и $AA_1 \perp BD$ (доказано в подточка б)) следва, че $AC \perp (BDD_1B_1)$.

**5.** а) От $MD \perp (ABCD)$ и $AC \subset (ABCD)$ следва, че $AC \perp MD$.




б) От $AC \perp MD$ (доказано в подточка а)) и $AC \perp BD$ (диагонали в ромба $ABCD$) следва, че $AC \perp (BDM)$.

в) От $AC \perp (BDM)$ (доказано в подточка б)) и $MB \subset (BDM)$ следва, че $AC \perp MB$.



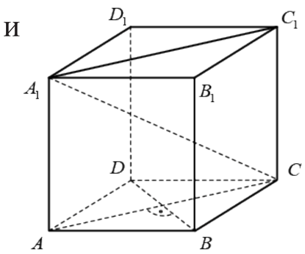

**6.** От $MN \perp (ABCD)$ и $BD \subset (ABCD)$ следва, че $MN \perp BD$.

От $AC \perp BD$ (диагонали в ромба $ABCD$) и $MN \perp BD$ следва, че $BD \perp (ACM)$ и $BD \perp AM$, $BD \perp CM$, тъй като околните ръбове $AM$ и $CM$ лежат в равнината $(ACM)$.

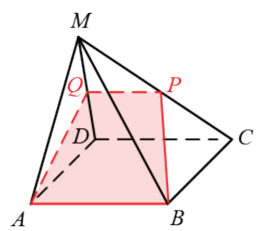
## 52. ВЗАИМНО ПОЛОЖЕНИЕ НА ПРАВА И РАВНИНА. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТ НА ПРАВА И РАВНИНА. УПРАЖНЕНИЕ

**1.** От $AA_1 \perp AB$ и $AA_1 \perp AD$ ($ABB_1A_1$ и $ADD_1A_1$ са квадрати) следва, че $AA_1 \perp (ABCD)$ и $AA_1 \perp BD$.

От $BD \perp AC$ (диагонали в квадрата $ABCD$) и $BD \perp AA_1$ следва, че $BD \perp (ACC_1A_1)$ и $BD \perp A_1C$, тъй като $A_1C$ е права от тази равнина.

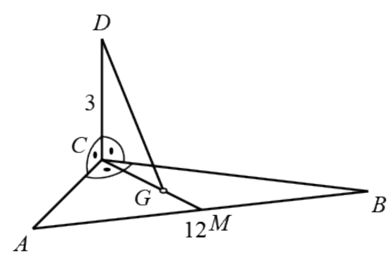



**2.** Ако $AQ \perp CD$, то от $PQ \| CD$ следва, че $AQ \perp PQ$ и $ABPQ$ е правоъгълен трапец с $\sphericalangle BAQ = \sphericalangle AQP = 90°$.



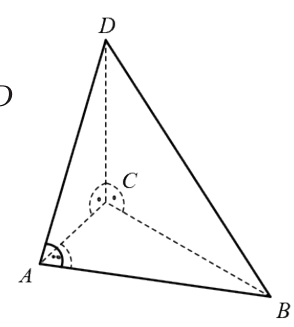

**3.** Нека $M$ е средата на хипотенузата $AB$.

Тогава $CG = \dfrac{2}{3}CM = \dfrac{2}{3}.\dfrac{AB}{2} = \dfrac{AB}{3} = 4$ cm.




От $CD \perp AC$ и $CD \perp BC$ следва, че $CD \perp (ABC)$ и $CD \perp CG$.

В правоъгълния $\Delta CGD$ пресмятаме $DG^2 = DC^2 + CG^2 = 9 + 16 = 25$ и $DG = 5$ cm.




**4.** От $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD = 90°$ следва, че $CD \perp AC$, $CD \perp BC$ и $CD \perp (ABC)$. Тогава ръбът $CD$ е перпендикулярен и на правата $AB$ от основата $ABC$.

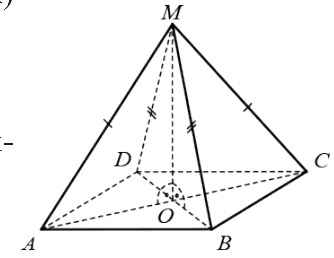
От $CD \perp AB$ и $AD \perp AB$ (по условие $\sphericalangle BAD = 90°$) следва, че $AB \perp (ACD)$ и $AB \perp AC$.

Следователно $\Delta ABC$ е правоъгълен с $\sphericalangle BAC = 90°$.

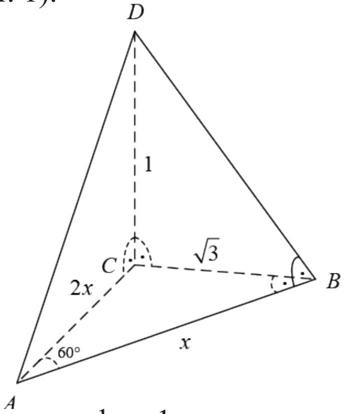
**5.** От $AM = CM$ (по условие) и $AO = CO$ (свойство на диагоналите на успоредник) следва, че $MO$ е медиана и височина, т.е. $MO \perp AC$.

Аналогично, от $\Delta BMD$ следва, че $MO \perp BD$.

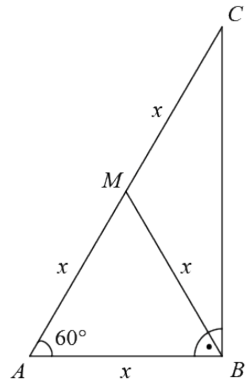
Получихме, че $MO$ е перпендикулярна на пресекателните прави $AC$ и $BD$ от равнината на успоредника и следователно $MO \perp (ABCD)$.



**6.** От $CD \perp (ABC)$ следва, че $CD \perp AB$, $CD \perp AC$ и $CD \perp BC$, т.е. триъгълниците $ACD$ и $BCD$ са правоъгълни (фиг. 1).



фиг. 1



фиг. 2

В $\Delta ABC$ построяваме медианата $BM$ и означаваме $AB = x$ (фиг. 2).

Тогава $AC = 2AB = 2x$ и $AM = MC = x$.

Триъгълникът $ABM$ е равностранен, тъй като $AB = AM = x$ и $\sphericalangle BAM = 60°$.

Тогава $BM = x$ и $BM = \dfrac{1}{2}AC$, откъдето следва, че $\sphericalangle ABC = 90°$, т.е. $\Delta ABC$ е правоъгълен.

От $CD \perp AB$ и $BC \perp AB$ следва, че $AB \perp (BCD)$, $AB \perp BD$ и $\Delta ABD$ е правоъгълен.

*Забележка*. Доказателството, че $\Delta ABC$ е правоъгълен може да се направи и с косинусовата теорема: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC.AB.\cos 60° = 4x^2 + x^2 - 2.2x.x.\dfrac{1}{2} = 3x^2$ и $BC = x\sqrt{3}$.

Тогава $AB^2 + BC^2 = x^2 + 3x^2 = 4x^2 = AC^2$, откъдето следва, че $\sphericalangle ABC = 90°$.

## 53. ОРТОГОНАЛНО ПРОЕКТИРАНЕ. РАЗСТОЯНИЕ ОТ ТОЧКА ДО РАВНИНА. ЪГЪЛ МЕЖДУ ПРАВА И РАВНИНА

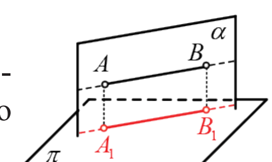
**1.** а) Правите са перпендикулярни на проекционната равнина и следователно са успоредни помежду си.

б) Едната права е перпендикулярна на проекционната равнина, а другата права не е. Тогава правите не са успоредни помежду си. Следователно те са кръстосани или се пресичат.

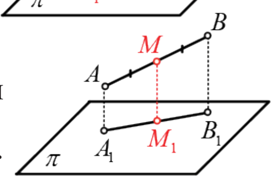
в) Правите не могат да са пресекателни. Следователно те са успоредни или кръстосани.

г) Правите не могат да са успоредни. Следователно те са пресекателни или кръстосани.

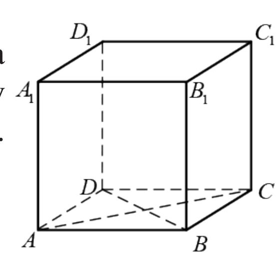
**2.** Нека отсечката $AB$ е успоредна на проекционната равнина $\pi$, а $A_1B_1$ е нейната ортогонална проекция. Ако $\alpha$ е равнината, определена от успоредните прави $AA_1$ и $BB_1$, то от $AB \| \pi$ и $\alpha \cap \pi = A_1B_1$ следва, че $AB \| B_1A_1$. Тогава $ABB_1A_1$ е успоредник и $AB = A_1B_1$.



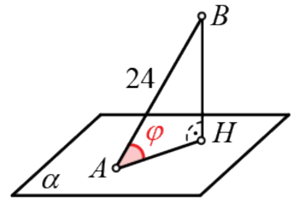

**3.** Нека $M$ е средата на отсечката $AB$, а $A_1$, $B_1$ и $M_1$ са съответните ортогонални проекции на трите точки. От $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{A_1M_1}{M_1B_1}$ и $AM = MB$ следва, че $A_1M_1 = M_1B_1$ и $M_1$ е средата на $A_1B_1$.




**4.** Ръбовете $AB$, $CD$ и $C_1D_1$ и $DD_1$ са перпендикулярни на равнината $(BCC_1B_1)$. Тогава точките $B$, $B$, $C$, $C$ и $C_1$ са проекциите съответно на точките $A$, $B$, $C$, $D$ и $D_1$ върху тази равнина, а отсечките $BC$, $BC$ и $CC_1$ са проекциите съответно на $AD$, $BD$ и $DD_1$. Проекцията на $CD$ е точката $C$, тъй като $CD \perp (BCC_1B_1)$.



**5.** Нека точката $A$ лежи в α, $H$ е проекцията на $B$ в α, а φ е ъгълът, който $AB$ сключва с равнината.



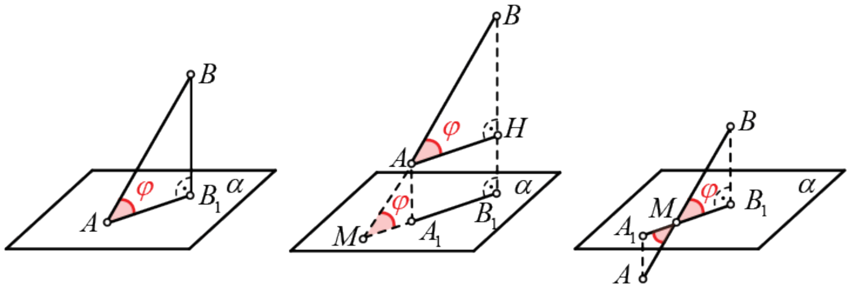

Тогава в правоъгълния $\Delta AHB$ $BH = AB.\sin\varphi = 24\sin\varphi$.

а) От φ = 30° намираме $BH = 24\sin 30° = 24.\dfrac{1}{2} = 12\text{ cm}$.

б) От φ = 45° определяме $BH = 24\sin 45° = 24.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}\text{ cm}$.

в) При φ = 60° пресмятаме $BH = 24\sin 60° = 24.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}\text{ cm}$.

**6.** Ще разгледаме случаите, когато $A \in$ α, $AB$ няма общи точки с α и $AB$ пресича α.




*I случай.* Нека $A \in$ α. Тогава $A \equiv A_1$ и от правоъгълния $\Delta ABB_1$ намираме, че $AB_1 = AB.\cos\varphi$.

Означаваме с $M$ прободa на правата $AB$ с α.

*II случай.* Нека отсечката $AB$ няма общи точки с α.

Построяваме $AH \| A_1B_1$. Тогава $\sphericalangle BMB_1 = \sphericalangle BAH = \varphi$ (съответни ъгли), $AHA_1B_1$ е правоъгълник и $AH = A_1B_1$. В правоъгълния $\Delta AHB$ $AH = AB.\cos\varphi$.

Следователно $A_1B_1 = AB.\cos\varphi$.

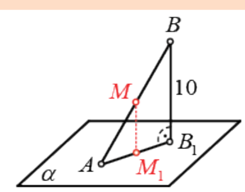
*III случай.* Отсечката $AB$ пресича α.

В правоъгълните триъгълници $AMA_1$ и $BMB_1$ изразяваме $A_1M = AM.\cos\varphi$ и $B_1M = BM.\cos\varphi$.

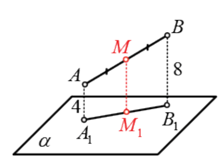
Тогава $A_1B_1 = A_1M + B_1M = AM.\cos\varphi + BM.\cos\varphi = (AM + BM)\cos\varphi = AB.\cos\varphi$.

## 54. ОРТОГОНАЛНО ПРОЕКТИРАНЕ. РАЗСТОЯНИЕ ОТ ТОЧКА ДО РАВНИНА. ЪГЪЛ МЕЖДУ ПРАВА И РАВНИНА. УПРАЖНЕНИЕ

**1.** Означаваме с $M$ средата на отсечката $AB$, а с $M_1$ – ортогоналната ѝ проекция в α.



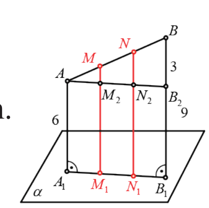

а) В $\Delta ABB_1$ $MM_1$ е средна отсечка и $MM_1 = \dfrac{1}{2}BB_1 = 5\text{ cm}$.




б) В трапеца $ABB_1A_1$ $MM_1$ е средна основа и $MM_1 = \dfrac{AA_1 + BB_1}{2} = \dfrac{4+8}{2} = 6\text{ cm}$.

**2.** *I начин.* Построяваме $AA_2 \| A_1B_1$ $(B_2 \in BB_1)$ и нека $AB_2 \cap MM_1 = M_2$, $AB_2 \cap NN_1 = N_2$.

Тогава $AA_1 = M_2M_1 = N_2N_1 = B_2B_1 = 6$ и $BB_2 = 3$.

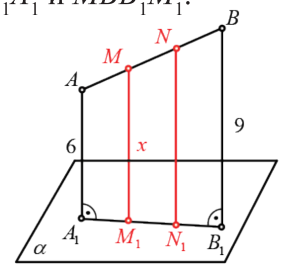



От $MM_1 \| NN_1 \| BB_1$ следва, че $\Delta AM_2M \sim \Delta AN_2N \sim \Delta AB_2B_1$,

$\dfrac{MM_2}{BB_2} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow MM_2 = \dfrac{BB_2}{3} = \dfrac{3}{3} = 1\text{ cm}$ и $\dfrac{NN_2}{BB_2} = \dfrac{AN}{AB} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow NN_2 = \dfrac{2BB_2}{3} = \dfrac{2.3}{3} = 2\text{ cm}$.

Следователно $MM_1 = M_1M_2 + MM_2 = 6 + 1 = 7\text{ cm}$ и $NN_1 = N_1N_2 + NN_2 = 6 + 2 = 8\text{ cm}$.

*II начин.* От $AM = MN = NB$ следва, че $MM_1$ и $NN_1$ са средни основи в трапеците $ANN_1A_1$ и $MBB_1M_1$.

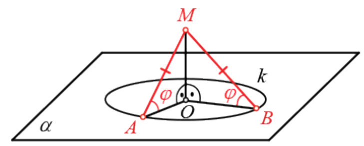



Означаваме $MM_1 = x$. Тогава $NN_1 = \dfrac{MM_1 + BB_1}{2} = \dfrac{x+9}{2}$,

$$MM_1 = \frac{AA_1 + NN_1}{2} = \frac{6 + \frac{x+9}{2}}{2} = \frac{x+21}{4}$$ и от $x = \dfrac{x+21}{4} \Leftrightarrow 4x = x + 21$ намираме $x = 7$.

Следователно $MM_1 = 7$ cm и $NN_1 = \dfrac{7+9}{2} = 8$ cm.

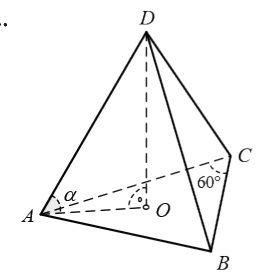
**3.** Ако $A$ и $B$ са произволни точки от $k$, то $AO$ и $BO$ са проекциите на наклонените $MA$ и $MB$.




а) От $AO = BO = R$ следва, че $MA = MB$. Тъй като $A$ и $B$ са произволни точки, то равенство важи за всички точки на $k$ и $M$ е на равни разстояния от тези точки.

б) От $AO = BO = R$ следва, че наклонените $MA$ и $MB$ сключват един и същи ъгъл $\varphi$ с $\alpha$. В правоъгълния $\Delta AOM$ $\sphericalangle MAO = \varphi$ и $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{MO}{AO} = \dfrac{R}{R} = 1$ и $\varphi = 45^\circ$.

**4.** Тъй като проекцията на върха $D$ на тетраедъра е центърът $O$ на описаната около $\Delta ABC$, то ъглите, които околните ръбове сключват с $(ABC)$, са равни помежду си и нека $\sphericalangle(AD, ABC) = \sphericalangle DAO = \alpha$.

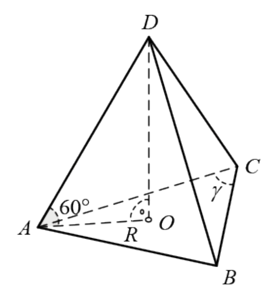



От синусовата теорема в $\Delta ABC$ намираме $AO = R = \dfrac{AB}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{AB}{\sqrt{3}}$.

В правоъгълния $\Delta AOD$ пресмятаме $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{DO}{AO} = \dfrac{DO\sqrt{3}}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$ и $\alpha = 45^\circ$.

Следователно околните ръбове сключват ъгъл $45^\circ$ с равнината на основата $ABC$.

**5.** Тъй като околните ръбове сключват равни ъгли с основата, то $O$ е центърът на описаната около $\Delta ABC$ окръжност и $AO = R$ е неин радиус.




В $\Delta AOD$ от $\dfrac{DO}{AO} = \operatorname{tg}60^\circ$ получаваме, че $R = \dfrac{DO}{\sqrt{3}}$.

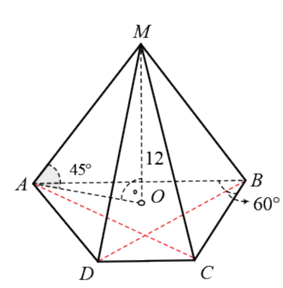
Означаваме $\sphericalangle ACB = \gamma$ и от синусовата теорема в $\Delta ABC$ намираме

$$\frac{AB}{\sin\gamma} = 2R \Leftrightarrow \sin\gamma = \frac{AB}{2R} = \frac{AB\sqrt{3}}{2DO} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

От $\sin\gamma = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ следва, че $\gamma = 45^\circ$ или $\gamma = 135^\circ$.

Тъй като $O$ е вътрешна точка за $\Delta ABC$, то триъгълникът е остроъгълен и $\gamma = 45^\circ$.

**6.** Щом околните ръбове сключват с основата равни ъгли, то върхът $M$ на пирамидата се проектира в центъра $O$ на описаната около $ABCD$ окръжност.




Тогава трапецът е вписан в окръжност с радиус $AO = R$ и $AC = BD$.

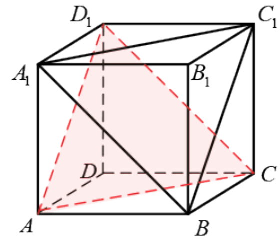
От правоъгълния $\Delta AOM$ намираме $\dfrac{AO}{OM} = \operatorname{cotg} 45^\circ$ и $R = 12.1 = 12$ cm.

От синусовата теорема за $\Delta ABC$ получаваме $AC = 2R\sin 60^\circ = 2.12.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ cm.

Следователно $AC = BD = 12\sqrt{3}$ cm.

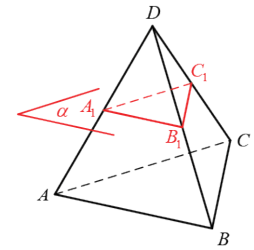
## 55. ВЗАИМНО ПОЛОЖЕНИЕ НА ДВЕ РАВНИНИ. ДВУСТЕНЕН ЪГЪЛ. ЪГЪЛ МЕЖДУ ДВЕ РАВНИНИ

**1.** Щом правите лежат в успоредни равнини, те нямат обща точка. Следователно правите са успоредни или кръстосани.




**2.** Равнината $(ACD_1)$ е пресекателна с $(ABC_1)$, тъй като имат обща точка $A$. От $AC \| A_1C_1$ и $AD_1 \| BC_1$ следва, че $(ACD) \| (A_1BC_1)$.

($AC \| A_1C_1$ следва от успоредника $ACC_1A_1$ или от пресичането на успоредните равнини $(ABCD)$ и $(A_1B_1C_1D_1)$ с равнината $(ACC_1A_1)$).



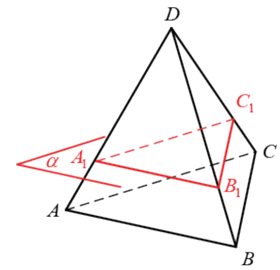

**3.** Означаваме с $A_1$ средата на ръба $AD$, с $\alpha$ – равнината, минаваща през $A_1$ и успоредна на основата $(ABC)$, а с $B_1$ и $C_1$ – пресечните точки на $\alpha$ с ръбовете $BD$ и $CD$.

От $\alpha \| (ABC)$ следва, че пресечниците $A_1B_1$ и $AB$ на $\alpha$ и $(ABC)$ с равнината $(ABD)$ са успоредни прави.

Тогава в $\Delta ABD$ $A_1B_1$ е средна отсечка, тъй като $A_1$ е средата на $AD$ и $A_1B_1 \| AB$.

Следователно $B_1$ е средата на $BD$. Аналогично се доказва, че $C_1$ е средата на $CD$.

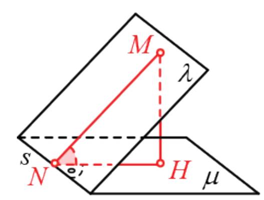
**4.** Ако $\alpha$ е равнината, успоредна на основата $(ABC)$, то пресечниците на тези равнини с равнините $(ABD)$, $(BCD)$ и $(ACD)$ са успоредни прави: $A_1B_1 \| AB$, $B_1C_1 \| BC$ и $A_1C_1 \| AC$.




Тогава $\Delta A_1B_1D \sim \Delta ABD$ и $\Delta B_1C_1D \sim \Delta BCD$, $\dfrac{A_1D}{AD} = \dfrac{B_1D}{BD}$ и $\dfrac{B_1D}{BD} = \dfrac{C_1D}{CD}$.

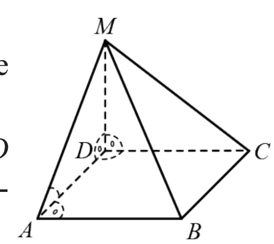
Следователно $\dfrac{A_1D}{AD} = \dfrac{B_1D}{BD} = \dfrac{C_1D}{CD}$.

**5.** От $MH \perp \mu$ и $s \subset \mu$ следва, че $MH \perp s$.




По условие $HN \perp s$.

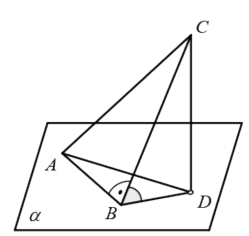
Следователно $s \perp (MNH)$ и $\sphericalangle MNH$ е линеен ъгъл на двустенния $\sphericalangle(\lambda, \mu)$.




**6.** Като вземем предвид, че $MD = ADM \cap CDM$ и $(ABCD) \perp MD$ (по условие), то $\sphericalangle ADC$ е линеен ъгъл на двустенния $\sphericalangle(ADM, CDM)$.

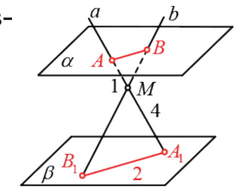
Точката $D$ е ортогоналната проекция на върха $M$ върху основата $ABCD$ и $DA \perp AB$ ($ABCD$ е правоъгълник). От предходната задача 5 следва, че $\sphericalangle DAM$ е линеен ъгъл на двустенния $\sphericalangle(ABM, ABCD)$.

**7.** Точката $D$ е ортогоналната проекция на върха $C$ върху равнината $\alpha$ и $CB \perp AB$. От задача 2 в урока следва, че $\sphericalangle DBC$ е линеен ъгъл на двустенния $\sphericalangle(ABC, \alpha)$.



# 56. ВЗАИМНО ПОЛОЖЕНИЕ НА ДВЕ РАВНИНИ. ДВУСТЕНЕН ЪГЪЛ. ЪГЪЛ МЕЖДУ ДВЕ РАВНИНИ. УПРАЖНЕНИЕ

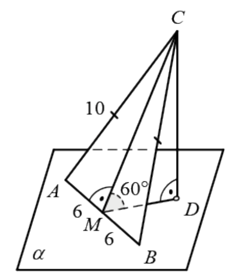
**1.** Правите $a$ и $b$ са пресекателни и определят равнина, която пресича успоредните равнини $\alpha$ и $\beta$ в успоредни пресечници.




От $AB \perp A_1B_1$ следва, че $\Delta ABM \sim \Delta A_1B_1M$ и $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{MA}{MA_1}$.

Пресмятаме $MA = AA_1 - MA_1 = 5 - 4 = 1$ cm и $AB = \dfrac{MA.A_1B_1}{MA_1} = \dfrac{1.2}{4} = 0,5$ cm.

**2.** Нека $CD$ е разстоянието от $C$ до $\alpha$ и $CM \perp AB$ ($M \in AB$). Тогава $AM = MB = 6$ cm и $\sphericalangle CMD = 60°$ е линеен ъгъл на двустенния $\sphericalangle(ABC, \alpha)$.

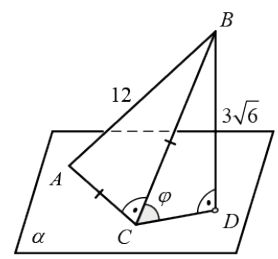



От правоъгълните $\Delta AMC$ и $\Delta CMD$ последователно намираме:

$CM^2 = AC^2 - AM^2 = 10^2 - 6^2 = 16.4 = 8^2$ и $CM = 8$ cm; $\dfrac{CD}{CM} = \sin 60° \Leftrightarrow CD = 8.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

Следователно разстоянието от $C$ до $\alpha$ е $4\sqrt{3}$ cm.

**3.** Нека $BD = 3\sqrt{6}$ е разстоянието от $B$ до $\alpha$.



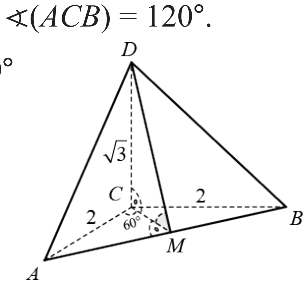

От $BD \perp \alpha$ и $BD \perp AC$ следва, че $\sphericalangle BCD = \varphi$ е линеен ъгъл на двустенния $\sphericalangle(ABC, \alpha)$.

От равнобедрения $\Delta ABC$ намираме $BC = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$.

Тогава в $\Delta BCD$ $\sin\varphi = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{3\sqrt{6}}{6\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\varphi = 60°$.

Следователно $\sphericalangle(ABC, \alpha) = 60°$.

**4.** От $CD \perp (ABC)$ следва, че $\sphericalangle ACB$ е линеен ъгъл на $\sphericalangle(ACD, BCD)$ и следователно $\sphericalangle(ACB) = 120°$.




Построяваме височината $CM$ ($M \in AB$) в равнобедрения $\Delta ABC$. Тогава $\sphericalangle ACM = 60°$ и от $\Delta AMC$ намираме $CM = AC.\cos 60° = 2.\dfrac{1}{2} = 1$.

От $CD \perp (ABC)$ и $CM \perp AB$ следва, че $\sphericalangle CMD$ е линеен ъгъл на $\sphericalangle(ABD, ABC)$.

В правоъгълния $\Delta CMD$ пресмятаме $\operatorname{tg}\sphericalangle CMD = \dfrac{CD}{CM} = \sqrt{3}$ и $\sphericalangle CMD = 60°$.

**5.** Нека $O$ е ортогоналната проекция на върха на пирамидата върху равнината на основата. Щом всички околни ръбове на пирамида са равни, а околните стени сключват с основата равни ъгли, то основата е описан и вписан многоъгълник, като $O$ е център и на двете окръжности.

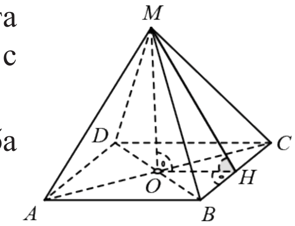
а) Триъгълникът е равностранен, тъй като центърът $O$ на описаната окръжност е център и на вписаната окръжност.

б) Около успоредник може да се опише окръжност само ако е правоъгълник и да се впише окръжност само при ромб. Следователно основата на пирамидата е квадрат.

в) Трапецът е равнобедрен, тъй като е вписан, и в него може да се впише окръжност.

**6.** По условие всички ръбове на четириъгълната пирамида са равни. Тогава основата е ромб, тъй като основните ръбове са равни. От равенството на околните ръбове следва, че около основата може да се опише окръжност и следователно ромбът е квадрат.

Като вземем предвид, че върхът на пирамидата се проектира в центъра на квадрата и в квадрата може да се впише окръжност, то околните стени сключват равни ъгли с основата.




Нека върхът на пирамидата е $M$, основата ѝ е квадратът $ABCD$, а $H$ е средата на ръба $BC$. Тогава $\sphericalangle MHO$ е линеен ъгъл на двустенния ъгъл при ръба $BC$.

Ако $a$ е страната на квадрата, то $OH = \dfrac{a}{2}$, $MH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ ($MH$ е височина в равностранния $\Delta BMC$) и от правоъгълния $\Delta MOH$ намираме $\cos\sphericalangle MHO = \dfrac{OH}{MH} = \dfrac{2a}{2a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

## 57. ПРИЗМА. ПРАВА ПРИЗМА

**1.** а) Твърдението е вярно, защото всички околни стени на права призма са правоъгълници.

б) Твърдението не е вярно. Ако една от околните стени е правоъгълник, то околният ръб в тази стена е перпендикулярен на основния ръб от стената. Това не е достатъчно да се твърди, че околният ръб е перпендикулярен на равнината на основата на призмата.

**2.** Другите две страни на четириъгълника са околни ръбове на призмата. В случая на наклонена призма четириъгълникът е успоредник (подточка а)), ако призмата е права – четириъгълникът е правоъгълник (подточка б)).

**3.** Верният отговор е В). Основата на правилната четириъгълна призма е квадрат. Щом една от околните стени е квадрат, то околният всички ръбове са равни и стените са квадрати.

**4.** Ако призмата е $n$ - ъгълна, то всеки връх на едната основа може да се свърже с $n - 3$ върха от другата основа, които не лежат в една и съща околна стена. Броят на всички възможни диагонали е $n(n - 3)$.

а) При $n = 4$ броят на диагоналите е $4(4 - 3) = 4$.

б) При $n = 5$ броят на диагоналите е $5(5 - 3) = 10$.

в) При $n = 10$ броят на диагоналите е $10(10 - 3) = 70$.

**5.** а) Основата на правилната триъгълна призма е равностранен триъгълник с лице $B = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Лицето на околната повърхнина е $S = 3a^2$, а на пълната – $S_1 = S + 2B = \left(6 + \sqrt{3}\right)\dfrac{a^2}{2}$.

Обемът на призмата е $V = Bh = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

б) Основата на правилната четириъгълна призма е квадрат с лице $B = a^2$.

Лицето на околната повърхнина е $S = 4a^2$, а на пълната – $S_1 = S + 2B = 6a^2$.

Обемът на призмата е $V = Bh = a^2.a = a^3$.

**6.** Площта, която трябва да се боядиса е таван с лице 5.4 = 20 m$^2$, две по-големи стени с общо лице 2.5.3 = 30 m$^2$ и една малка стена от 4.3 = 12 m$^2$ или общо 62 m$^2$.

За боядисването са необходими 6,2 броя кутии.

Следователно минималният брой на закупените кутии трябва да е 7.

**7.** Нека измеренията на паралелепипеда са $a$, $b$ и $c$, като $a : b : c = 3 : 4 : 12$ и нека $a = 3x$, $b = 4x$ и $c = 12x$. От равенството $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 9x^2 + 16x^2 + 144x^2 = 169x^2$ и $d = 13$ cm намираме $x = 1$, $a = 3$, $b = 4$ и $c = 12$ cm. Повърхнината на паралелепипеда е $S_1 = 2(ab + ac + bc) = 2(3.4 + 3.12 + 4.12) = 192$ cm², а обемът – $V = abc = 3.4.12 = 144$ cm³.

## 58. ПРИЗМА. ПРАВА ПРИЗМА. УПРАЖНЕНИЕ

**1.** Нека $a$ и $h$ са дължините на основния ръб и на височината, а $d = \sqrt{13}$ cm е диагоналът на призмата. От $a : h = \sqrt{2} : 3$ означаваме $a = \sqrt{2}x$ и $h = 3x$.

От $d^2 = 2a^2 + h^2 = 4x^2 + 9x^2 + 13x^2 = 13$ намираме $x = 1$, $a = \sqrt{2}$ cm и $h = 3$ cm.

Повърхнината на призмата е $S_1 = 2a^2 + 4ah = 4 + 12\sqrt{3}$ cm², а обемът – $V = a^2h = 2.3 = 6$ cm³.

**2.** От равенството $5^2 + 12^2 = 13^2$ следва, че основата на призмата е правоъгълен триъгълник с катети $a = 5$ cm, $b = 12$ cm, хипотенуза $c = 13$ cm и лице $B = \dfrac{ab}{2} = \dfrac{5.12}{2} = 30\,\text{cm}^2$.

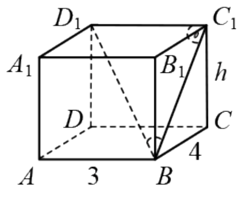
а) Диаметърът на описаната около основата окръжност е $c = 13$ cm.

Повърхнината на призмата е $S_1 = S + 2B = (a + b + c)c + 2B = 30.13 + 2.30 = 450$ cm²,
а обемът – $V = B.c = 30.13 = 390$ cm³.

б) Радиусът на вписаната в правоъгълния триъгълник окръжност е $r = \dfrac{a+b-c}{2} = \dfrac{5+12-13}{2} = 2\,\text{cm}$. Тогава околният ръб (височината) на призмата е $h = 4$ cm.
Повърхнината на призмата е $S_1 = S + 2B = (a + b + c)h + 2B = 30.4 + 2.30 = 180$ cm²,
а обемът – $V = Bh = 30.4 = 120$ cm³.

**3.** Нека $a$ и $h$ са основния ръб и височината на призмата.

От $V = Bh = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}h = \sqrt{3} \Leftrightarrow a^2h = 4$ и $S = 3ah = 6 \Leftrightarrow ah = 2$ намираме $a = 2$ cm и $h = 1$ cm.

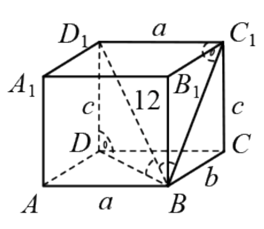



**4.** От $D_1C_1 \perp (BCC_1B_1)$ следва, че $\sphericalangle(BD_1, BCC_1B_1) = \sphericalangle C_1BD_1 = 30°$.
От правоъгълните триъгълници $BC_1D_1$ и $BCC_1$ намираме $BC_1 = C_1D_1 \operatorname{cotg} 30° = 3\sqrt{3}$,
$CC_1^2 = BC_1^2 - BC^2 = 27 - 16 = 11$ и $CC_1 = \sqrt{11}$ cm.
Повърхнината на паралелепипеда е $S_1 = 2(AB.BC + BC.CC_1 + AB.CC_1) =$
$= 2\left(3.4 + 4.\sqrt{11} + 3.\sqrt{11}\right) = 2\left(12 + 7\sqrt{11}\right)$ cm², а обемът – $V = AB.BC.CC_1 = 3.4.\sqrt{11} = 12\sqrt{11}$ cm³.

**5.** Означаваме с $a = AB$, $b = BC$ и $c = CC_1$ измеренията на паралелепипеда.

Отсечките $BD$ и $BC_1$ са проекциите на диагонала $BD_1$ съответно върху равнините $(ABCD)$ и $(BCC_1B_1)$.

Тогава $\sphericalangle DBD_1 = \sphericalangle(BD_1,\ ABCD) = 45°$ и $\sphericalangle C_1BD_1 = \sphericalangle(BD_1,\ BCC_1B_1) = 30°$.



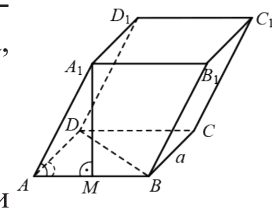

От правоъгълните триъгълници $BDD_1$ и $BC_1D_1$ пресмятаме

$c = BD_1.\sin 45° = 12.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ cm и

$a = BD_1.\sin 30° = 12.\dfrac{1}{2} = 6\,\text{cm}$.

От равенството $BD_1^2 = a^2 + b^2 + c^2$ намираме $b^2 = 12^2 - 6^2 - \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 144 - 36 - 72 = 36$ и $b = 6$ cm.

Следователно $AB = BC = 6$ cm, $CC_1 = 6\sqrt{2}$ cm.




**6.** Нека средата $M$ на ръба $AB$ е ортогоналната проекция на върха $A_1$ върху равнината на основата $ABCD$. Тогава $MA_1$ е височина на паралелепипеда, $\sphericalangle MAA_1 = \sphericalangle(AA_1, ABCD) = 45°$ и в правоъгълния $\Delta AMA_1$ $MA_1 = AM = \dfrac{a}{2}$ и $AA_1 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

В ромба $ABCD$ $\sphericalangle BAD = 60°$, $\Delta ABD$ е равностранен с лице $S_{ABD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Обемът на паралелепипеда е $V = S_{ABCD}.MA_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

## 59. ПИРАМИДА

**1.** *Тетраедър:* основата и околните стени са произволни триъгълници.

*Правилна триъгълна пирамида:* основа – равностранен триъгълник; околни стени – равнобедрени триъгълници.

*Правилен тетраедър:* основата и околните стени са равностранни триъгълници.

**2.** а) НЕ. Ако околните ръбове са равни следва, че около основата е вписан многоъгълник, но не и че е правилен многоъгълник.

б) НЕ. Ако основата е правилен многоъгълник, проекцията на върха може да е произволна точка от основата, която не е център на многоъгълника.

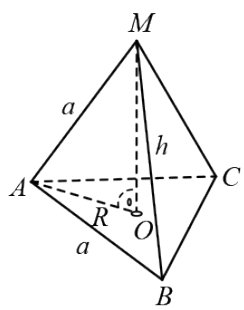
в) ДА. Щом околните ръбове са равни, то основата е вписан многоъгълник с равни страни, от което следва, че е правилен многоъгълник и върхът се проектира в неговия центъра (център на описаната окръжност).

**3.** Ще използваме означенията и резултатите от задача 1 от урока.

Тогава $\alpha = \sphericalangle MAO$, $\varphi = \sphericalangle MNO$ и $\sin\alpha = \dfrac{h}{l}$, $\sin\varphi = \dfrac{h}{k}$.

а) $\sin\alpha = \dfrac{h}{l} = \dfrac{\sqrt{13}}{5}$, $\sin\varphi = \dfrac{h}{k} = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$.

б) $\sin\alpha = \dfrac{h}{l} = \dfrac{\sqrt{7}}{5}$, $\sin\varphi = \dfrac{h}{k} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$.



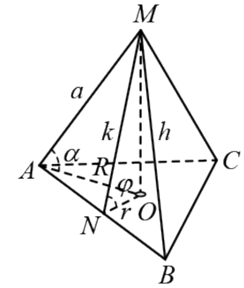

**4.** Повърхнината на тетраедъра е $S_1 = 4S_{ABC} = 4.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

От $\Delta AOM$ пресмятаме $h^2 = a^2 - R^2 = a^2 - \dfrac{3a^2}{9} = \dfrac{6a^2}{9}$ и $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Обемът на тетраедъра е $V = \dfrac{1}{3}S_{ABC}.h = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a^2\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{12}$.

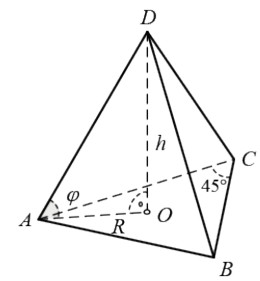
**5.** При означенията и резултатите от предходните задачи следва, че

$$\cos\alpha = \frac{R}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{3a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ и } \cos\varphi = \frac{r}{k} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}.$$




**6.** От зад. 4 от урок 54 следва, че околните ръбове са равни и $\varphi = \sphericalangle(AD, ABC) = 60°$.

В $\Delta ABC$ от косинусовата теорема намираме $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos 45° = 9 + 8 - 2.3.2\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 5$ и $AB = \sqrt{5}$, а от синусовата теорема: $2R = \frac{AB}{\sin 45°} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}$ и $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$.



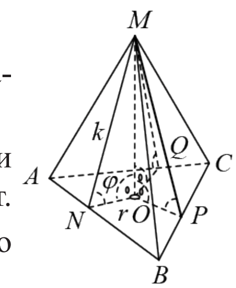

В $\Delta AOD$ $h = DO = R.\text{tg}\,60° = \frac{\sqrt{10}}{2}.\sqrt{3} = \frac{\sqrt{30}}{2}$ и $AD = \frac{R}{\cos 60°} = 2R = \sqrt{10}$.

Дължините на околните ръбове са $AD = BD = CD = \sqrt{10}$ cm.

Пресмятаме $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.BC.\sin 45° = \frac{1}{2}.3.2\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 3$ и обема на пирамидата

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}.h = \frac{1}{3}.3.\frac{\sqrt{30}}{2} = \frac{\sqrt{30}}{2} \text{ cm}^3.$$

**7*.** Ще докажем твърдението за триъгълна пирамида (в общия случай за $n$-ъгълна пирамида разсъжденията са аналогични).

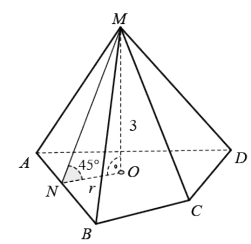



Нека $\Delta ABC$ е основа на пирамида $ABCM$. Тъй като околните стени сключват еднакви ъгли с основата, то върхът $M$ се проектира в центъра $O$ на вписаната в триъгълника окръжност. Ако $N$, $P$ и $Q$ са петите на перпендикулярите, спуснати от $O$ към страните $AB$, $BC$ и $AC$, то $ON = OP = OQ = r$,

$\Delta MON \cong \Delta MOP \cong \Delta MOQ$ и $MN = MP = MQ = k$. Но $MN$, $MP$ и $MQ$ са височини в околните стени и

$$S = S_{ABM} + S_{BCM} + S_{ACM} = \frac{AB.k}{2} + \frac{BC.k}{2} + \frac{AC.k}{2} = \frac{(AB + BC + AC)k}{2} = pk.$$

Пресмятаме отношението $\frac{B}{S} = \frac{pr}{pk} = \frac{r}{k} = \cos\varphi$, от което следва, че $B = S.\cos\varphi$.




**8*.** От зад. 4 от урок 56 следва, че $S_{ABCD} = 60$ cm².

Обемът на пирамидата е $V = \frac{S_{ABCD}.MO}{3} = \frac{60.3}{3} = 60$ cm³.

От равенството $S_{ABCD} = S.\cos 45° \Leftrightarrow 60 = S.\frac{\sqrt{2}}{2}$ намираме околната повърхнина $S = 60\sqrt{2}$ cm².

Тогава пълната повърхнина е $S_1 = S + B = 60\left(\sqrt{2} + 1\right)$ cm².

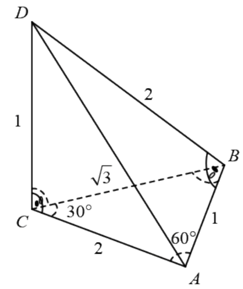
## 60. ПИРАМИДА. УПРАЖНЕНИЕ

**1.** Ако околните стени са равностранни триъгълници, то страните на основата са равни. Тъй като и околните ръбове са равни, то върхът на пирамидата се проектира в центъра на описаната около основата окръжност. От това следва, че основата е правилен многоъгълник и верният отговор е Г).

**2.** а) В $\Delta ABC$ $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACB = 60° + 30° = 90°$ и $\sphericalangle ABC = 90°$.

От $CD \perp (ABC)$ следва, че ръбът $CD$ е перпендикулярен на страните на $\Delta ABC$.

Триъгълниците $ACD$ и $BCD$ са правоъгълни, тъй като $CD \perp AC$ и $CD \perp BC$.




От $CD \perp AB$ и $CB \perp AB$ следва, че $AB \perp (BCD)$, $AB \perp BD$ и $\Delta ABD$ е правоъгълен.

От $\Delta BCD$ намираме $BD^2 = BC^2 + CD^2 = 3 + 1 = 4$ и $BD = 2$ cm, а от $\Delta ABC$ получаваме

$$\frac{BC}{AC} = \sin 60^\circ \Leftrightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} \Leftrightarrow AC = 2\,\text{cm и } AB = BC.\text{cotg}\,60^\circ = \sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{3} = 1\,\text{cm}.$$

б) Пресмятаме повърхнината $S_1$ на пирамидата: $S_1 = S_{ABC} + S_{ABD} + S_{ACD} + S_{BCD} =$

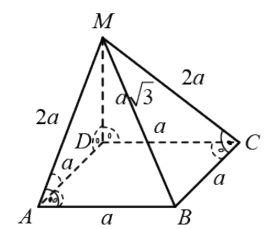
$$= \frac{AB.BC}{2} + \frac{AB.BD}{2} + \frac{AC.CD}{2} + \frac{BC.CD}{2} = \frac{1.\sqrt{3}}{2} + \frac{1.2}{2} + \frac{2.1}{2} + \frac{\sqrt{3}.1}{2} = 2 + \sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

Обемът на пирамидата е $V = \frac{1}{3}.S_{ABC}.h = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$ cm$^3$.

**3.** а) От $MD \perp (ABCD)$ следва, че $MD \perp AD$ и $MD \perp CD$.

От правоъгълния $\Delta ADM$ намираме: $AM^2 = AD^2 + DM^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2$ и $AM = 2a$;

$$\text{tg}\sphericalangle DAM = \frac{MD}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \text{ и } \sphericalangle DAM = 60^\circ.$$




От $AB \perp AD$ и $MD \perp AD$ следва, че $AB \perp (ADM)$ и $AB \perp AM$.

Аналогично се доказва, че $CM \perp BC$.

От $BC \| AD$ следва, че $\sphericalangle(MA, BC) = \sphericalangle(MA, AD) = \sphericalangle DAM = 60^\circ$, а от $AB \| CD$ намираме $\sphericalangle(MA, CD) = \sphericalangle(MA, AB) = \sphericalangle BAM = 90^\circ$.

б) Обемът на пирамидата е $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.MD = \frac{1}{3}a^2.a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Като вземем предвид, че $\Delta ADM \cong \Delta CDM$ и $\Delta ABM \cong \Delta CBM$, за повърхнината на пирамидата намираме:

$$S_1 = 2S_{ADM} + 2S_{ABM} + S_{ABCD} = 2.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 2.\frac{2a^2}{2} + a^2 = 3a^2 + a^2\sqrt{3} = \left(3 + \sqrt{3}\right)a^2.$$

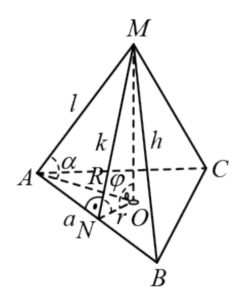
**4.** Нека $ABCM$ е правилна триъгълна пирамида с основа равностранния $\Delta ABC$, основен ръб $AB = a$, околен ръб $AM = l$, височина $MO = h$, апотема $MN = k$ и $\sphericalangle(l, ABC) = \sphericalangle AMO = \alpha$, $\sphericalangle(ABM, ABC) = \sphericalangle MNO = \varphi$.

За радиусите $R$ на описаната и $r$ на вписаната окръжности за $\Delta ABC$ имаме съответно: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ и $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

а) От правоъгълните триъгълници $NOM$ и $AOM$ намираме:

$$NO^2 = NM^2 - OM^2 \Leftrightarrow r^2 = k^2 - h^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = 7 - 4 = 3 \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} \text{ и } a = 6 \text{ cm}.$$

$$AM^2 = AO^2 + OM^2 \Leftrightarrow l^2 = R^2 + h^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{6\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4 = 16 \text{ и } l = 4 \text{ cm}.$$




б) Лицето на основата е $B = S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ cm$^2$.

Обемът на пирамидата е $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}.9\sqrt{3}.2 = 6\sqrt{3}$ cm$^3$,

а повърхнината – $S_1 = S + B = \frac{P_{ABC}.k}{2} + B = \frac{18\sqrt{7}}{2} + 9\sqrt{3} = 9\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)$ cm$^2$.

в) В $\Delta AOM$ от $\sin\alpha = \frac{MO}{AM} = \frac{h}{l} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ намираме $\alpha = 30^\circ$, а от $\Delta MON$ определяме $\sin\varphi = \frac{MO}{MN} = \frac{h}{k} = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

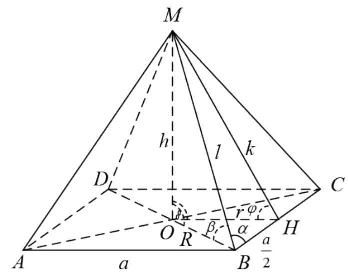
**5.** Нека $ABCDM$ е правилна четириъгълна пирамида с основа квадрата $ABCD$, основен ръб $AB = a$, околен ръб $BM = l$, височина $MO = h$ и апотема $MN = k$.

За радиусите $R$ на описаната и $r$ на вписаната окръжности за $ABCD$ имаме съответно: $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ и $r = \dfrac{a}{2}$.

а) От $\beta = 45°$ следва, че правоъгълния $\Delta BOM$ е равнобедрен.

Тогава: $\dfrac{OM}{BM} = \sin\beta \Leftrightarrow \dfrac{h}{l} = \sin\beta \Leftrightarrow h = l.\sin 45° = 6\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 6$ и

$OB = OM \Leftrightarrow R = h \Leftrightarrow \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = 6 \Leftrightarrow a = 6\sqrt{2}$.




Получихме: $h = 6$ cm, $a = 6\sqrt{2}$ cm.

б) От $\Delta BHM$ намираме $k^2 = l^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = 72 - 18 = 54$ и $k = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.

Тогава $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{HM}{BH} = \dfrac{2k}{a} = \dfrac{2.3\sqrt{6}}{6\sqrt{2}} = \sqrt{3}$.

В $\Delta HOM$ $\operatorname{cotg}\varphi = \dfrac{OH}{OM} = \dfrac{r}{h} = \dfrac{a}{2h} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2.6} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Следователно $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, $\operatorname{cotg}\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

**6.** Нека в пирамидата $ABCDM$ точката $O$ е ортогоналната проекция на върха $M$ върху равнината на основата $ABCD$.

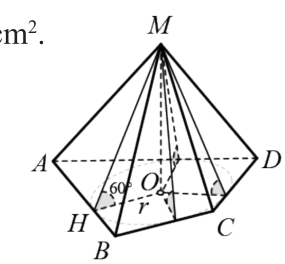
Тъй като околните стени сключват еднакви ъгли с основата, то $O$ е център на вписаната в $ABCD$ окръжност $k$.

От равенството $B = S.\cos 60°$ намираме околната повърхнина $S = 2S_{ABCD} = 2.36 = 72$ cm$^2$.

Пълната повърхнина на пирамидата е $S_1 = S + B = 72 + 36 = 108$ cm$^2$.

В правоъгълния $\Delta MOH$ пресмятаме $MO = r.\operatorname{tg} 60° = 3\sqrt{3}$.

Обемът на пирамидата е $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.MO = \dfrac{1}{3}.36.3\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$ cm$^3$.



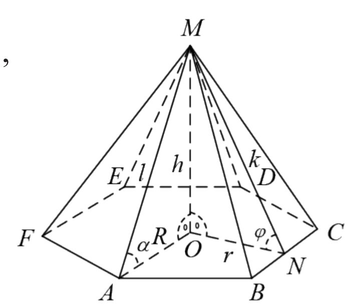

**7.** Нека в правилната шестоъгълна пирамида $MABCDEF$ с връх $M$ точката $O$ е центърът на основата, а $N$ е средата на ръба $BC$. Означаваме $AB = a = 2$ (основен ръб), $MO = h = 2\sqrt{3}$ (височина), $AM = l$ (околен ръб), $MN = k$ (апотема), $AO = R$ (радиус на описаната около основата окръжност) и $NO = r$ (радиус на вписаната в основата окръжност).

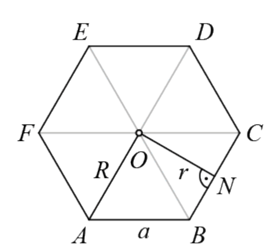
Тогава $\sphericalangle MAO = \alpha$, $\sphericalangle MNO = \varphi$, $R = a = 2$ ($\Delta AOB$ е равностранен) и $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (височина в равностранния $\Delta BOC$).

От $\Delta AOM$ намираме $l = \sqrt{h^2 + R^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$,

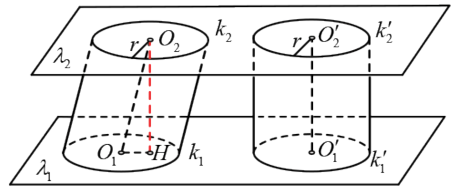
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h}{R} = \sqrt{3}$ и $\alpha = 60°$, а от $\Delta MON$ получаваме

$k = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{12 + 3} = \sqrt{15}$ и $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{h}{r} = 2$.



# 61. ПРАВ КРЪГОВ ЦИЛИНДЪР

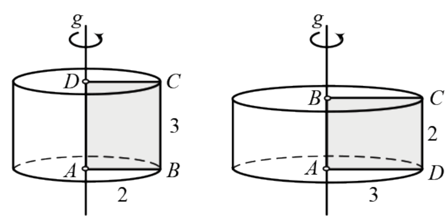



**1.** Височините на двата конуса са равни ($HO_2 = O_1'O_2'$ – това са разстоянията между успоредните равнини $\lambda_1$ и $\lambda_2$).
Оста на наклонения цилиндър е по-голяма $O_1O_2 > O_1'O_2'$ (в правоъгълния $\Delta O_1HO_2$ $O_1O_2 > HO_2$ и $HO_2 = O_1'O_2'$).
Обемите са двата цилиндъра са равни, тъй като височините им са равни, а основите са еднакви кръгове.

**2.** От $S_{C_1} = S_{C_2} \Leftrightarrow 2\pi r_1 h_1 = 2\pi r_2 h_2 \Leftrightarrow r_1 h_1 = r_2 h_2$ и $r_1 = 3r_2$ следва, че $3r_2h_1 = r_2h_2$, $h_2 = 3h_1$ и $h_1 : h_2 = 1 : 3$ .

Тогава $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2} = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2 . \dfrac{h_1}{h_2} = 9.\dfrac{1}{3} = 3$ и $V_1 : V_2 = 3 : 1$.

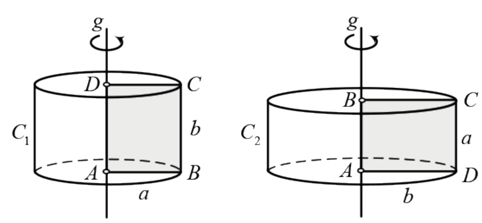
**3.** Нека правоъгълникът е $ABCD$ със страни $AB = 2$ cm и $AD = 3$ cm, а $g$ е права, минаваща през една от страните му. Полученото ротационно тяло е цилиндър с радиус $r$ и височина $h$.




Ако $g = AD$, то $r = AB = 2$ cm, $h = AD = 3$ cm, $V = \pi r^2 h = 12\pi$ cm$^3$ и $S_1 = 2\pi r(h + r) = 4\pi.5 = 20\pi$ cm$^2$.

Ако $g = AB$, то $r = AD = 3$ cm, $h = AB = 2$ cm, $V = \pi r^2 h = 18\pi$ cm$^3$ и $S_1 = 2\pi r(h + r) = 6\pi.5 = 30\pi$ cm$^2$.

**4.** Нека $AB = a$ и $AD = b$ са страните на правоъгълника, $g$ е оста на въртене, радиусът на ротационни цилиндър е $r$, а височината – $h$.




Ако $g = AD$, то $r = a$, $h = b$, $V_1 = \pi a^2 b$ и $S_1 = 2\pi r\,(h + r) = 2\pi a\,(b + a)$.

Ако $g = AB$, то $r = b$, $h = a$, $V_2 = \pi b^2 a$ и $S_2 = 2\pi b(a + b)$.

Тогава $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi a^2 b}{\pi b^2 a} = \dfrac{a}{b}$, $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{2\pi a(b + a)}{2\pi b(a + b)} = \dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{S_1}{S_2}$.

**5.** Варелът е с височина $h = 1{,}6$ m $= 16$ dm, радиус $r = 40$ cm $= 4$ dm и обем $V = \pi r^2 h = 16\pi.16 = 256\pi$ dm$^3$.

Водата заема $75\%V = \dfrac{3}{4}.256\pi = 192\pi \approx 192.3{,}14 = 602{,}88$ dm$^3$.

Като вземем предвид, че 1dm$^3$ = 1 литър, то водата във варела е приблизително 603 литра.

**6.** Радиусът на цилиндъра е $r = 5$ m, площта на околната повърхнина е $S = 2\pi rh = 2\pi.5.3 = 30\pi$, а тази на тавана – $B = \pi r^2 = 25\pi$.

Площта за боядисване е $\dfrac{S}{2} + B = 15\pi + 25\pi = 40\pi \approx 40.3{,}14 = 125{,}6$ m$^2$, за което ще са необходими около 13 литра боя.

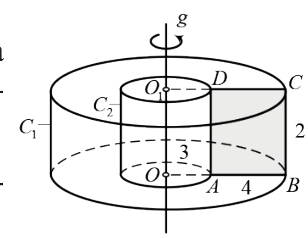
## 62. ПРАВ КРЪГОВ ЦИЛИНДЪР. УПРАЖНЕНИЕ

**1.**

| | $r$ | $h$ | $B$ | $S$ | $S_1$ | $V$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| а) | 3 | 1 | 9π | 6π | 24π | 9π |
| б) | 1 | 3 | π | 6π | 8π | 3π |
| в) | 2 | 2 | 4π | 8π | 16π | 8π |
| г) | 2 | 1 | 4π | 4π | 12π | 4π |
| д) | 1 | 2 | π | 4π | 6π | 2π |

**2.** От $V = 2\pi r^2 h = 2\pi \Leftrightarrow r^2 h = 2$ и $h = 2r$ следва, че $r^3 = 1$, $r = 1$ cm и $h = 2$ cm.

Повърхнината на цилиндъра е $S = S_1 = 2\pi r(h+r) = 6\pi$ cm$^2$.




**3.** Да означим с $O$ и $O_1$ петите на перпендикулярите, спуснати от $A$ и $D$ към правата $g$. Тогава полученото ротационното тяло се състои от цилиндъра $C_1$ с ос $OO_1$ и образуваща $BC$, от който е „издълбан" цилиндър $C_2$ с ос $OO_1$ и образуваща $AD$.

Повърхнината на това тяло е обединението на околните повърхнини на двата цилиндъра и двата венеца на основите.

За околните повърхнини $S_{C_1}$ и $S_{C_2}$ намираме:

$S_{C_1} = 2\pi.OB.BC = 2\pi.7.2 = 28\pi$, $S_{C_2} = 2\pi.OA.AD = 2\pi.3.2 = 12\pi$ .

Лицето $S_B$ на венеца пресмятаме като разлика от лицата на основите на двата цилиндъра:

$S_B = \pi.OB^2 - \pi.OA^2 = 49\pi - 9\pi = 40\pi$ .

За лицето на повърхнината $S_T$ на ротационното тяло получаваме:

$S_T = S_{C_1} + S_{C_2} + 2S_B = 28\pi + 12\pi + 2.40\pi = 120\pi$ cm$^2$.

Обемът на ротационното тяло е разлика от обемите на двата цилиндъра.

Тогава $V_T = V_{C_1} - V_{C_2} = \pi.OB^2.BC - \pi.OA^2.AD = \pi.49.2 - \pi.9.4 = 80\pi$ cm$^3$.

**4.** Обемът $V$ на тръбата е разлика от обемите на двата цилиндъра $C_1$ и $C_2$ с диаметри $d_1 = 40$ cm и $d_2 = 36$ cm. Радиусите на цилиндрите в метри са $r_1 = 0{,}2$ m и $r_2 = 0{,}18$ m и

$V = \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h = 10\pi\left[(0{,}2)^2 - (0{,}18)^2\right] = 10\pi.0{,}38.0{,}02 = 0{,}076\pi \approx 0{,}23864$ m$^3$.

Приблизителната тежест на тръбата е 7859.0,23864 ≈ 1873 kg.

**5*.** Ако $l = 2\pi r$ е дължината на окръжността на основата на цилиндъра, то $h$ и $l$ са дължините на страните на правоъгълника, който е развивка на околната повърхнина.

По условие $l.h = 12$, а от питагоровата теорема следва зависимостта $l^2 + h^2 = 25$.

За $l$ и $h$ получаваме системата $\left|\begin{array}{l} l^2 + h^2 = 25 \\ l.h = 12 \end{array}\right.$, чиито положителни решения са $l = 4$, $h = 3$ или $l = 3$, $h = 4$.

Ако $h = 3$ cm, от $l = 2\pi r = 4$ намираме $r = \dfrac{2}{\pi}$ cm и $V = \pi r^2 h = \pi.\dfrac{4}{\pi^2}.3 = \dfrac{12}{\pi}$ cm$^3$.

Ако $h = 4$ cm, от $l = 2\pi r = 3$ намираме $r = \dfrac{3}{2\pi}$ cm и $V = \pi r^2 h = \pi.\dfrac{9}{4\pi^2}.3 = \dfrac{27}{4\pi}$ cm$^3$.

**6*.** От $V = \pi r^2 h = 2\pi$ и $S_1 = 2\pi r(h + r) = 6\pi$ за $r$ и $h$ получаваме системата $\begin{vmatrix} r(h+r)=3 \\ r^2h=2 \end{vmatrix}$. Заместваме $h = \dfrac{2}{r^2}$ в първото уравнение:

$$r\left(\frac{2}{r^2}+r\right)=3 \Leftrightarrow r^3-3r+2=0 \Leftrightarrow (r^2-1)r-2(r-1)=0 \Leftrightarrow (r-1)(r+1)r-2(r-1)=0 \Leftrightarrow (r-1)(r^2+r-2)=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (r-1)^2(r+2)=0 \Leftrightarrow r=1,\ r=-2$. Тогава $h=\dfrac{2}{r^2}=2$.

Следователно $r = 1$ cm, $h = 2$ cm.

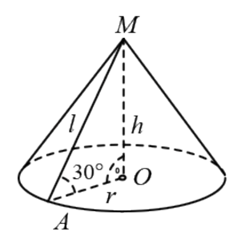
## 63. ПРАВ КРЪГОВ КОНУС

**1.**

| | $r$ | $h$ | $l$ | $B$ | $S$ | $S_1$ | $V$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| а) | 1 | 2 | $\sqrt{5}$ | $\pi$ | $\pi\sqrt{5}$ | $(1+\sqrt{5})\pi$ | $\frac{2\pi}{3}$ |
| б) | $\sqrt{3}$ | 1 | 2 | $3\pi$ | $2\pi\sqrt{3}$ | $(3+2\sqrt{3})\pi$ | $\pi$ |
| в) | 1 | $\sqrt{3}$ | 2 | $\pi$ | $2\pi$ | $3\pi$ | $\pi\sqrt{3}$ |
| г) | 2 | 2 | $2\sqrt{2}$ | $4\pi$ | $4\pi\sqrt{2}$ | $4\pi(1+\sqrt{2})$ | $\frac{8\pi}{3}$ |
| д) | 3 | 4 | 5 | $9\pi$ | $15\pi$ | $24\pi$ | $12\pi$ |

**2.** В урок 53 доказахме, че „*Две наклонени от една и съща точка към дадена равнина са равни тогава и само тогава, когато сключват равни ъгли с основата*“. От това следва, че образувателните на прав кръгов конус сключват равни ъгли с равнината на основата, тъй като са равни отсечки, спуснати от върха към равнината на конуса.

**3.** Нека $AM = l = 12$ cm е образуваща на конуса, $O$ е центърът на основата, $AO = r$ и $MO = h$.

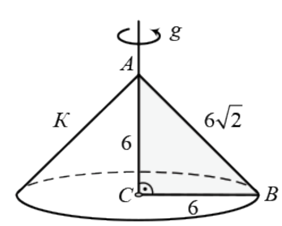



В $\Delta AOM\ \sphericalangle MAO = 30°$, $r = l.\cos 30° = 12.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm и $h = l.\sin 30° = 12.\dfrac{1}{2} = 6$ cm.

Повърхнината на конуса е $S_1 = \pi r(l+r) = 6\sqrt{3}\pi\left(12+6\sqrt{3}\right) = 36\pi\left(2\sqrt{3}+3\right)$ cm$^2$,

а обемът – $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.108.6\pi = 216\pi$ cm$^3$.

**4.** Нека $\Delta ABC$ с $\sphericalangle C = 90°$ се върти около права $g$ минаваща през катета $AC$.



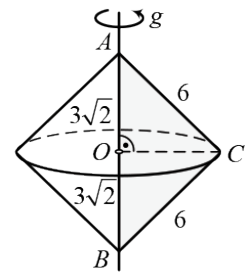

От $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC.BC = \dfrac{1}{2}BC^2 = 18$ намираме $AC = BC = 6$ cm и $AB = BC\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm.

Ротационното тяло е конус $K$ с радиус $r = BC = 6$, образуваща $l = AB = 6\sqrt{2}$ и височина $h = AC = 6$.

Повърхнината на $K$ е $S_1 = \pi r(l+r) = 6\pi\left(6\sqrt{2}+6\right) = 36\pi\left(\sqrt{2}+1\right)$ cm$^2$,

а обемът – $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.36.6 = 72\pi$ cm$^3$.

**5*.** Нека триъгълникът е $ABC$ с хипотенуза $AB$ и катети $AC = BC$.




От $S_{ABC} = 18 \Leftrightarrow \dfrac{AC^2}{2} = 18$ намираме $AC = 6$ cm. Тогава $AB = 6\sqrt{2}$ cm и $AO = CO = 3\sqrt{2}$ cm, където $O$ е средата на $AB$.

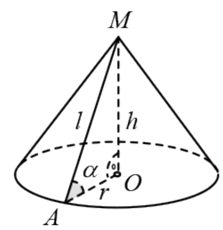
Ротационното тяло $T$ представлява два еднакви конуса с обща основа – кръг център $O$ и радиус $r = OC$.

Обемът на тялото е сбор от обемите на двата конуса или удвоеният обем на единия конус: $V_T = 2V_K = 2.\dfrac{1}{3}\pi r^2.AO = 2.\dfrac{1}{3}.18\pi.3\sqrt{2} = 36\pi\sqrt{2}$ cm³.

Лицето на повърхнината на ротационното тяло е сбор от лицата на околните повърхнини на двата конуса: $S_T = S_K + S_K = 2S_K = 2\pi r.AC = 2\pi.3\sqrt{2}.6 = 36\pi\sqrt{2}$ cm².

## 64. ПРАВ КРЪГОВ КОНУС. УПРАЖНЕНИЕ

**1.** Нека $M$ е върхът на конуса, $O$ – центърът на основата, а $AM = l$ е негова образуваща, а $\alpha$ –ъгълът който образуващата сключва с основата.




а) Лицето на околната повърхнина е $S = \pi rl$, а на основата – $B = \pi r^2$.

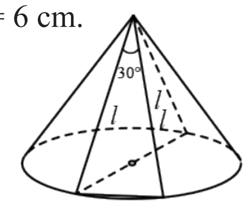
От $S = 2B \Leftrightarrow \pi rl = 2\pi r^2 \Leftrightarrow l = 2r$ и $\cos\alpha = \dfrac{r}{l} = \dfrac{1}{2}$ намираме $\alpha = 60°$.

б) От $\Delta AOM$ намираме $r = h.\text{cotg}\,60° = 6\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 6$ cm и $l = 2r = 12$ cm.

За обема и лицето на повърхнината на конуса получаваме:

$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.36.6\sqrt{3} = 72\pi\sqrt{3}$ cm³, $S_1 = \pi r(l + r) = \pi.6.18 = 108\pi$ cm².

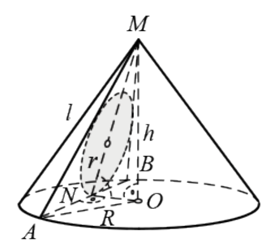
**2.** Ако $l$ е образуващата на конуса, а осното сечение е равностранен триъгълник, то $l = 6$ cm.




Лицето на сечението на конуса с равнина, минаваща през две негови образуващи, ъгълът между които е 30°, е $S = \dfrac{1}{2}l^2.\sin 30° = \dfrac{1}{2}.36.\dfrac{1}{2} = 9$ cm².

**3.** Нека $R$ е радиусът на основата на конуса, $AM = l$ е образуваща на конуса, а $N$ е средата на $AB$. Тогава $\sphericalangle ONM = 30°$ е линеен ъгъл на двустенния ъгъл между $\gamma$ и основата.

В равностранния $\Delta ABM$ $MN = 3r = 6$ и $AB = AM = 2r\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ .




От правоъгълните триъгълници $MON$ и $AON$ намираме:

$MO = MN\sin 30° = \dfrac{6.1}{2} = 3$ , $NO = MN.\cos 30° = 6.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ ,

$R^2 = AO^2 = AN^2 + NO^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 39$ и $R = \sqrt{39}$ .

За обема и лицето на повърхнината на конуса получаваме:

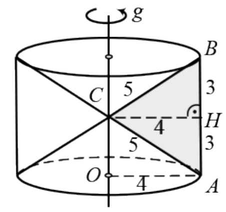
$V = \dfrac{\pi R^2 h}{3} = \dfrac{\pi.39.3}{3} = 39\pi$ , $S_1 = \pi R\left(l + R\right) = \pi.\sqrt{39}\left(4\sqrt{3} + \sqrt{39}\right) = \left(12\sqrt{13} + 39\right)\pi = 3\left(4\sqrt{13} + 13\right)\pi$ .

**4.** От $h = 3$ и $2r = 8 \Leftrightarrow r = 4$ намираме образуващата $l^2 = h^2 + r^2 = 9 + 16 = 25$ и $l = 5$.

Повърхнината на конуса е $S = \pi rl = 20\pi \approx 20.3,14 = 62,8$ cm².

Като вземем предвид, че площта на един лист е 2 m², броят на листовете за обшиване на покрива е 69,08 : 2 ≈ 35.

**5.** Ротационно тяло $T$ представлява цилиндър $C$, от който са „издълбани“ два еднакви конуса $K$.




В $\Delta ABC$ построяваме височината $AH$ и от правоъгълния $\Delta AHC$ намираме $CH=\sqrt{AC^2-AH^2}=\sqrt{25-9}=4$.

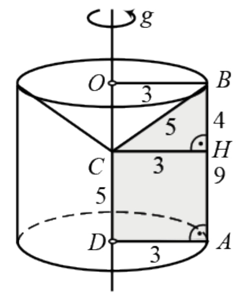
Лицето на повърхнината на ротационното тяло е сбор от лицата на околните повърхнини на цилиндъра и двата конуса:

$S_T=S_C+2S_K=2\pi r.AB+2\pi r.AC=2\pi.4.6+2\pi.4.5=48\pi+40\pi=88\pi$.

Обемът на тялото е разликата от обема на цилиндъра и на двата еднакви конуса: $V_T=V_C-2V_K=\pi r^2.AB-2.\dfrac{1}{3}\pi r^2.CO=16\pi.6-2.\dfrac{1}{3}.16\pi.3=96\pi-32\pi=64\pi$.

**6.** Ротационното тяло $T$ представлява цилиндър $C$, от който е „издълбан“ конус $K$ с образуваща $BC$.

Радиусът на цилиндъра и конуса е $r=3$.




В трапеца $ABCD$ построяваме $CH\|DA$. Тогава $CH=3$, $BH=4$ и от $\Delta BHC$ намираме

$BC=\sqrt{BH^2+CH^2}=\sqrt{16+9}=5$.

Лицето на повърхнината на ротационното тяло е сбор от лицата на околната повърхнина и на основата на цилиндъра и лицето на околната повърхнина на конуса.

$S_T=S_C+B_C+S_K=2\pi r.AB+\pi r^2+\pi r.BC=2\pi.3.9+9\pi+\pi.3.5=54\pi+9\pi+15\pi=78\pi$.

Обемът на тялото е разлика от обемите на цилиндъра и конуса.

$V_T=V_C-V_K=\pi r^2.DO-\dfrac{1}{3}\pi r^2.CO=9\pi.9-\dfrac{1}{3}.9\pi.4=81\pi-12\pi=69\pi$.

## 65. СФЕРА И КЪЛБО

**1.** Повърхнината на сфера $\sigma$ с радиус $r$ е $S=4\pi r^2$, а на сфера $\sigma_1$ с радиус $R=nr$ е $S_1=4\pi R^2=4\pi(nr)^2=4\pi n^2r^2$.

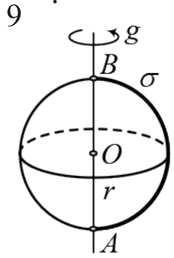
Тогава $\dfrac{S_1}{S}=\dfrac{4\pi n^2r^2}{4\pi r^2}=n^2$ и $S_1=n^2S$, като при $n=2$, $S_1=4S$, а при $n=3$, $S_1=9S$.

**2.** Обемът на кълбо $k$ с радиус $r$ е $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$, а на кълбо $k_1$ с радиус $R=nr$ е $V_1=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi(nr)^3=\dfrac{4}{3}\pi n^3r^3$.

Тогава $\dfrac{V_1}{V}=n^3$ и $V_1=n^3V$, като при $n=2$, $V_1=8V$, а при $n=3$, $V_1=27V$.

**3.** Нека $S_1=4\pi r_1^2$ и $S_2=4\pi r_2^2$ са повърхнините на двете кълба.

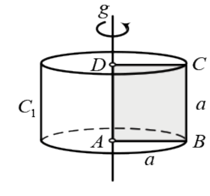
От $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{4\pi r_1^2}{4\pi r_1^2}=\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2=\dfrac{2}{3}$ следва, че $\dfrac{r_1}{r_2}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Тогава $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^2}=\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^3=\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^3=\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$.




**4.** Ако $r$ е радиусът на полуокръжността, то дължината ѝ е $\pi r=6\pi$ и $r=6$.

Лицето на получената сфера е $S=4\pi r^2=4\pi.36=144\pi$ cm$^2$.

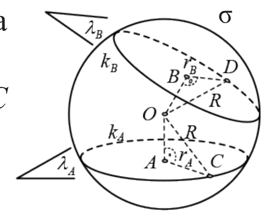
**5.** Ако $a$ е страната на квадрата, повърхнината и обемът на полученото тяло (цилиндър с радиус $r=a$ и височина $h=a$) са съответно $S_T=2\pi r(h+r)=4\pi a^2$ и $V_T=\pi r^2h=\pi a^3$.
Повърхнината и обемът на кълбо с радиус $R=a$ са $S_k=4\pi R^2=4\pi a^2$ и




$V_к=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi a^3$.

Следователно $S_T=S_k$, $V_T>V_k$.

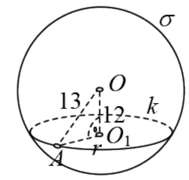
**6.** Нека $k_A$ и $k_B$ са окръжностите, които са сеченията на $\lambda_A$ и $\lambda_B$ със $\sigma$, $C \in k_A$ и $D \in k_B$ са произволни точки от тези окръжности и $AC = r_A$ и $BD = r_B$.
Тогава $OC = OD = R$ са радиуси на $\sigma$ и разглеждаме правоъгълните триъгълници $AOC$ и $BOD$.




а) От $OA = OB$ следва, че $\Delta AOC \cong \Delta BOD$ по IV признак ($OA = OB$, $OC = OD = R$ и $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90°$) и $r_A = r_B$.

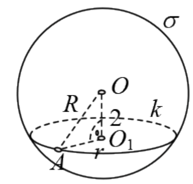
б) От $OA > OB$ и $OC = OD = R$ следва, че $r_A^2 = R^2 - OA^2$, $r_B^2 = R^2 - OB^2$, $r_A^2 < r_B^2$ и $r_A < r_B$.

**7.** Нека $k(O_1; r)$ е окръжността, която е сечение на сферата $\sigma(O; R = 13)$ с равнината, на разстояние $OO_1 = 12$, а $A \in k$ е произволна точка от окръжността.




От правоъгълния $\Delta AOO_1$ намираме $r^2 = R^2 - OO_1^2 = 13^2 - 12^2 = 25$ и $r = 5$. Дължината на $k$ е $l = 2\pi r = 10\pi$ cm.

**8.** Нека $R$ е радиусът на $\sigma$, $k(O_1; r)$ е сечението на $\lambda$ и $\sigma$, а $A \in k$ е произволна точка от окръжността.



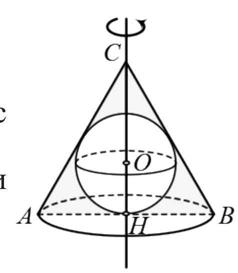

От $S = 4R^2 = 25\pi$ намираме $R^2 = \dfrac{25}{4}$ и $R = \dfrac{5}{2}$.

От правоъгълния $\Delta AOO_1$ намираме $r^2 = R^2 - OO_1^2 = \dfrac{25}{4} - 4 = \dfrac{9}{4}$ и $r = \dfrac{3}{2}$.

Лицето на сечението на $\lambda$ и $\sigma$ е $S = \pi r^2 = \dfrac{9}{4}\pi$ cm$^2$.

## 66. СФЕРА И КЪЛБО. УПРАЖНЕНИЕ

**1.** Нека $O$ е центърът на вписания в равностранния $\Delta ABC$ кръг, а $H$ е средата на $AB$. Страната на триъгълника е $AB = 6$ cm, а радиусът на кръга – $r = \dfrac{AB\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$ cm.



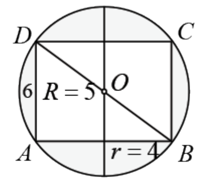

При въртенето на триъгълника около правата през височината $CH$ се получава конус $K$ с радиус $R = \dfrac{AB}{2} = 3$ cm, височина $h = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ cm и образуваща $l = BC = 6$ cm и кълбо $k$ с радиус $r = \sqrt{3}$ cm, „издълбано“ във вътрешността на конуса.

Обемът $V_T$ на полученото тяло е разлика от обемите $V_K = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi .9.3\sqrt{3} = 9\pi\sqrt{3}$ на конуса и $V_\kappa = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi .3\sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3}$ на кълбото.

Повърхнината $S_T$ на ротационното тяло е сбор от повърхнините $S_K = \pi r(R+l) = \pi.3.9 = 27\pi$ на конуса и $S_\sigma = 4\pi r^2 = 4\pi.3 = 12\pi$.

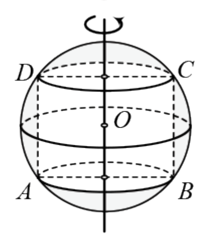
Следователно $V_T = V_K - V_\kappa = 9\pi\sqrt{3} - 4\pi\sqrt{3} = 5\pi\sqrt{3}$ cm$^3$ и $S_T = S_K + S_\sigma = 27\pi + 12\pi = 39\pi$ cm$^2$.

*Забележка*. В разглеждания случай казваме, че кълбото $k$ е вписано в конуса $K$.




**2.** Нека $k$ е кръг с радиус $R = 5$ cm, а $ABCD$ е правоъгълник със страна $AD = 6$ cm, вписан в $k$.

Тогава $BD = 10$ cm е диаметър и от питагоровата теорема за $\Delta ABD$ намираме $AB = 8$ cm.




При завъртането на кръга и изрязания правоъгълник около диаметъра, успореден на $AD$, се получава кълбо $k$ с радиус $R = 5$ cm с „изрязан“ във вътрешността цилиндър $C$ с радиус $r = 4$ cm и височина $h = AD = 6$ cm.

Обемът $V_T$ на полученото тяло е разлика от обемите $V_\kappa = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.125 = \frac{500\pi}{3}$ на кълбото и $V_C = \pi r^2 h = \pi.16.6 = 96\pi$ на цилиндъра.

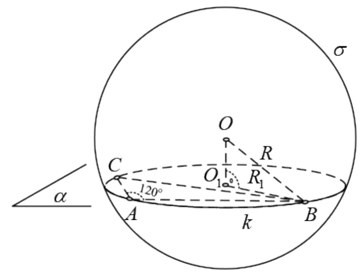
Повърхнината $S_T$ на ротационното тяло е сбор от повърхнините $S_\sigma = 4\pi R^2 = 4\pi.25 = 100\pi$ на сферата σ, определена от кълбото и $S_C = 2\pi r(h+r) = 2\pi.4.10 = 80\pi$ на цилиндъра.

Следователно $V_T = V_\kappa - V_C = \frac{500\pi}{3} - 96\pi = \frac{212\pi}{3}$ cm³ и $S_T = S_\sigma + S_C = 100\pi + 80\pi = 180\pi$ cm².

**3.** Сечението на σ с α е окръжност $k$ с център $O_1$ и радиус $R_1$, като $O_1$ е ортогоналната проекция на центъра $O$ на сферата върху равнината α, а $R_1$ – радиусът на описаната окръжност около $\Delta ABC$.

За $\Delta ABC$ намираме: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120° = 36 + 25 + 2.6.5.\frac{1}{2} = 91$, $BC = \sqrt{91}$ и

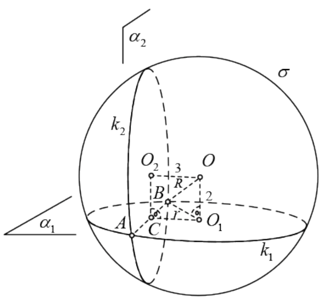
$$\frac{BC}{\sin 60°} = 2R_1 \Leftrightarrow R_1 = \frac{\sqrt{91}.2}{2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{91}{3}}.$$




Тогава лицето на сечението е $S_k = \pi R_1^2 = \frac{91\pi}{3}$ cm², а разстоянието от до $O$ до α –

$$OO_1 = \sqrt{R^2 - R_1^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{91}{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{3}} = \sqrt{3}.$$

**4*.** Нека равнините $\alpha_1$ и $\alpha_2$ отсичат от сферата $\sigma(O; R)$ окръжностите $k_1(O_1)$ и $k_2(O_2)$, $AB$ е общата хорда на $k_1$ и $k_2$, а $C$ е нейната среда.




Тогава $AB$ е перпендикулярна на $CO_1$ и $CO_2$ и $\sphericalangle O_1CO_2 = 90°$ е линеен ъгъл на двустенния ъгъл, определен от $\alpha_1$ и $\alpha_2$.

От $OO_1 \perp \alpha_1$, $OO_2 \perp \alpha_2$ и $\sphericalangle O_1CO_2 = 90°$ следва, че $C_1O_1OO_2$ е правоъгълник със страни $OO_1 = CO_2 = 2$ cm и $OO_2 = CO_1 = 3$ cm.

От правоъгълния $\Delta BCO_1$ намираме $BO_1^2 = BC^2 + CO_1^2 = 4 + 9 = 13$, а от $\Delta BOO_1$ пресмятаме $R^2 = BO^2 = OO_1^2 + BO_1^2 = 4 + 13 = 17$.

Лицето на повърхнината на сферата е $S_\sigma = 4\pi R^2 = 4.13\pi = 52\pi$ cm².

**5*.** Сеченията на $\lambda_1$ и $\lambda_2$ със σ са окръжностите $k_1(O_1; R_1)$ и $k_2(O_2; R_2)$, като $O_1$ и $O_2$ са ортогоналните проекции на центъра $O$ на сферата върху $\lambda_1$ и $\lambda_2$.

Разстоянието между $\lambda_1$ и $\lambda_2$ е $O_1O_2 = 7$, а от лицата на сеченията $S_1 = \pi R_1^2 = 9\pi$ и $S_2 = \pi R_2^2 = 16\pi$ намираме $R_1 = 3$ и $R_2 = 4$.

Нека $O_1A_1$ и $O_2A_2$ са два успоредни радиуса на $k_1$ и $k_2$, а $R$ е радиусът на сферата.

От правоъгълните триъгълници $A_1O_1O$ и $A_2O_2O$ може да запишем:

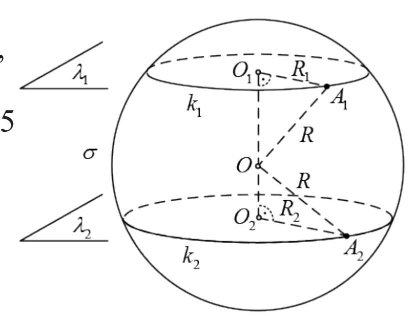
$$OO_1 = \sqrt{R^2 - R_1^2} = \sqrt{R^2 - 9},\ OO_2 = \sqrt{R^2 - R_2^2} = \sqrt{R^2 - 16}.$$

Тогава $OO_1 + OO_2 = O_1O_2 \Leftrightarrow \sqrt{R^2 - 9} + \sqrt{R^2 - 16} = 7 \Leftrightarrow \sqrt{R^2 - 16} = 7 - \sqrt{R^2 - 9}$,

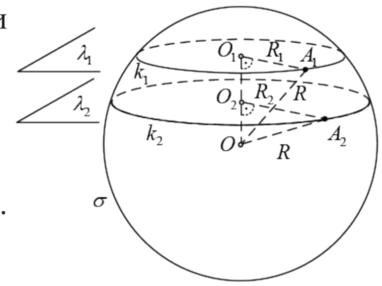
повдигаме в квадрат $\cancel{R^2} - 16 = 49 - 14\sqrt{R^2 - 9} + \cancel{R^2} - 9 \Leftrightarrow \sqrt{R^2 - 9} = 4 \Leftrightarrow R^2 = 25$

и намираме $R = 5$.

Повърхнината на сферата е $S_\sigma = 4\pi R^2 = 4\pi.25 = 100\pi$.



**6*.** Сеченията на $\lambda_1$ и $\lambda_2$ със $\sigma$ са окръжностите $k_1(O_1; R_1)$ и $k_2(O_2; R_2)$, като $O_1$ и $O_2$ са ортогоналните проекции на центъра $O$ на сферата върху $\alpha_1$ и $\alpha_2$.




Разстоянието между $\lambda_1$ и $\lambda_2$ е $O_1O_2 = 1$, а от лицата на сеченията $S_1 = \pi R_1^2 = 9\pi$ и $S_2 = \pi R_2^2 = 16\pi$ намираме $R_1 = 3$ и $R_2 = 4$.

Нека $O_1A_1$ и $O_2A_2$ са два успоредни радиуса на $k_1$ и $k_2$, а $R$ е радиусът на сферата.

От правоъгълните триъгълници $A_1O_1O$ и $A_2O_2O$ може да запишем:

$$OO_1 = \sqrt{R^2 - R_1^2} = \sqrt{R^2 - 9},\ OO_2 = \sqrt{R^2 - R_2^2} = \sqrt{R^2 - 16}.$$

Тогава $OO_1 - OO_2 = O_1O_2 \Leftrightarrow \sqrt{R^2 - 9} - \sqrt{R^2 - 16} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{R^2 - 9} = 1 + \sqrt{R^2 - 16}$, повдигаме в квадрат $\cancel{R^2} - 9 = 1 + 2\sqrt{R^2 - 16} + \cancel{R^2} - 16 \Leftrightarrow \sqrt{R^2 - 16} = 3 \Leftrightarrow R^2 = 25$ и намираме $R = 5$.

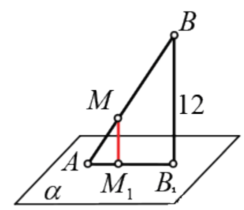
Повърхнината на сферата е $S_\sigma = 4\pi R^2 = 4\pi.25 = 100\pi$.

## 67. ЕЛЕМЕНТИ ОТ СТЕРЕОМЕТРИЯТА. ТЕМА ЗА САМОКОНТРОЛ

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Б | Б | Б | Б | А | 32 cm$^3$ | $\frac{40}{3}$ cm$^3$ | 45° |

**I част**

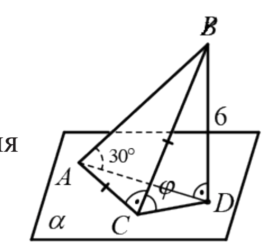
**1.** Невярно е твърдението от отг. Б). Нека двете прави са $a$ и $b$, като $a \perp c$ и $b \perp c$. Правите $a$ и $b$ може да са кръстосани или пресекателни и пак да са перпендикулярни на правата $c$.




**2.** Ако $M_1$ и $B_1$ са проекциите на $M$ и $B$ в $\alpha$, от $MM_1 \| BB_1$ следва, че $\Delta AMM_1 \sim \Delta ABB_1$ и

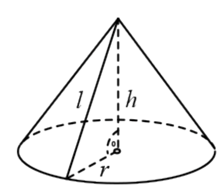
$$\frac{MM_1}{BB_1} = \frac{AM}{AB} \Leftrightarrow \frac{MM_1}{12} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow MM_1 = 3\,\text{cm (отг. Б).}$$

**3.** Ако $D$ е проекцията на върха $B$ в $\alpha$, от $BC \perp AC$ следва, че $\sphericalangle(ABC, \alpha) = \sphericalangle BCD = \varphi$.




От правоъгълния $\Delta ABD$ с $\sphericalangle BAD = 30°$ намираме $AB = 2BD = 12$, а от равнобедрения правоъгълен $\Delta ABC$ пресмятаме $BC = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$.

В $\Delta BCD$ $\sin\varphi = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{6}{6\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $\varphi = 45°$ (отг. Б).




**4.** Височината на конуса е $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$,

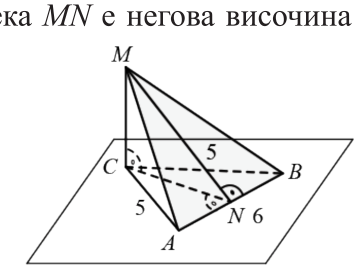
а обемът – $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.25.12 = 100\pi$ (отг. Б).

**5.** Повърхнината на цилиндъра е $S_C = 2\pi r(r + h)$, а на сферата – $S_\sigma = 4\pi r^2$.

От $S_C = S_\sigma \Leftrightarrow 2\pi r(r + h) = 4\pi r^2 \Leftrightarrow r + h = 2r \Leftrightarrow r = h$ следва, че $h : r = 1 : 1$ (отг. А).

**II част**

**6.** От $MC \perp (ABC)$ и $AC = BC$ следва, че $AM = BM$, $\Delta ABM$ е равнобедрен и нека $MN$ е негова височина ($N$ е средата на $AB$).



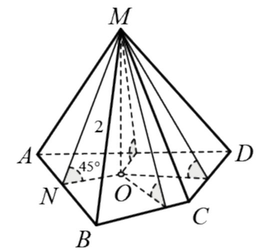

От $S_{ABM} = \dfrac{AB.MN}{2} = \dfrac{6MN}{2} = 12\sqrt{5}$ намираме $MN = 4\sqrt{5}$ cm,

а от $\Delta ACN$ получаваме $CN^2 = AC^2 - AN^2 = 25 - 9 = 16$ и $CN = 4$ cm.

В $\Delta MNC$ пресмятаме $MC^2 = MN^2 - CN^2 = 80 - 16 = 64$ и $MC = 8$ cm.

Обемът на пирамидата е $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.MC = \frac{1}{3}.\frac{AB.CN}{2}.MC = \frac{1}{3}.\frac{6.4}{2}.8 = 32\text{ cm}^3$.

**7.** Щом околните стени сключват с основата равни ъгли, то височината се проектира в центъра $O$ на вписаната в $ABCD$ окръжност.




Нека $\sphericalangle MNO = 45°$ е линеен ъгъл на двустенния $\sphericalangle(ABM, ABCD)$ и $NO = r$ е радиус на вписаната в основата окръжност.

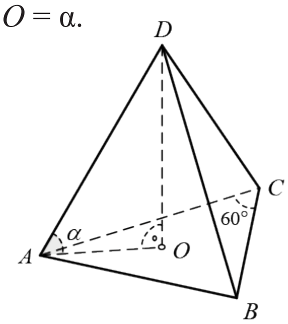
От правоъгълния $\Delta MON$ намираме $r = MO.\text{cotg}45° = 2$.

От $AB + CD = BC + AD = 10$ (свойство на описания четириъгълник) следва, че $P_{ABCD} = 20$, $p = 10$ cm и $S_{ABCD} = pr = 10.2 = 20\text{ cm}^2$.

Обемът на пирамидата е $V = \frac{S_{ABCD}.MO}{3} = \frac{20.2}{3} = \frac{40}{3}\text{ cm}^3$.

**III част**

**8.** Тъй като проекцията на върха $D$ на тетраедъра е центърът $O$ на описаната около $\Delta ABC$, то ъглите, които околните ръбове сключват с $(ABC)$, са равни помежду си и нека $\sphericalangle(AD, ABC) = \sphericalangle DAO = \alpha$.




От синусовата теорема в $\Delta ABC$ намираме $AO = R = \frac{AB}{2\sin 60°} = \frac{AB}{\sqrt{3}}$.

В правоъгълния $\Delta AOD$ пресмятаме $\text{tg}\alpha = \frac{DO}{AO} = \frac{DO\sqrt{3}}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$ и $\alpha = 45°$.

Следователно околните ръбове сключват ъгъл 45° с равнината на основата $ABC$.

## 68. ИРАЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ

**1.** а) Повдигаме двете страни на уравнението $\sqrt{x-1} = x-7$ в квадрат и получаваме: $x-1 = x^2-14x+49 \Leftrightarrow x^2-15x+50=0 \Leftrightarrow x_1=10,\ x_2=5$.

С проверка установяваме, че само $x = 10$ е корен на ирационалното уравнение:

$x=10:\ \sqrt{9}=10-7$ – вярно; $x=5:\ \sqrt{4}=5-7$ – невярно.

б) Повдигаме двете страни на уравнението $\sqrt{2x-3} = x-3$ в квадрат и получаваме: $2x-3 = x^2-6x+9 \Leftrightarrow x^2-8x+12=0 \Leftrightarrow x_1=6,\ x_2=2$.

С проверка установяваме, че само $x = 6$ е корен на ирационалното уравнение: $x=6:\ \sqrt{9}=6-3$ – вярно; $x=2:\ \sqrt{1}=2-3$ – невярно.

в) Повдигаме двете страни на уравнението $\sqrt{8-7x} = 3x-4$ в квадрат.

При $3x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$ то е равносилно на:

$8-7x = 9x^2-24x+16 \Leftrightarrow 9x^2-17x+8=0 \Leftrightarrow x_1=1,\ x_2=\frac{8}{9}$.

От $x_1 < \frac{4}{3}$ и $x_2 < \frac{4}{3}$ следва, че уравнението няма решение, т.е. $x \in \varnothing$.

г) Повдигаме двете страни на уравнението $2\sqrt{2x-3} = x+2$ в квадрат и получаваме:

$4(2x-3) = x^2+4x+4 \Leftrightarrow x^2-4x+16=0$.

Полученото уравнение няма реални корени ($D = 4 - 16 = -12$) и следователно ирационалното уравнение няма решение, т.е. $x \in \varnothing$.

д) При $x \geq \frac{1}{2}$ уравнението $\sqrt{x^2+2x+3} = 2x-1$ е равносилно на:

$x^2+2x+3 = 4x^2-4x+1 \Leftrightarrow 3x^2-6x-2=0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3+\sqrt{15}}{3} > \frac{1}{2},\ x_1 = \frac{3-\sqrt{15}}{3} < \frac{1}{2}$.

Следователно ирационалното уравнение има единствен корен $x = \frac{3+\sqrt{15}}{3}$.

**2.** а) Дефиниционното множество на уравнението е $DM$: $x \geq 1$.

Тогава $\underbrace{\sqrt{2x}+\sqrt{x-1}}_{+} = 3 \Leftrightarrow 2x+2\sqrt{2x^2-2x}+x-1=9 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2-2x} = 10-3x$.

При $x \leq \frac{10}{3}$ последното уравнение е равносилно на $8\left(x^2-x\right) = 100-60x+9x^2 \Leftrightarrow$

$8\left(x^2-x\right) = 100-60x+9x^2 \Leftrightarrow x^2-52x+100=0 \Leftrightarrow x_1 = 50$ (не е решение), $x_2 = 2$ (решение).

Следователно ирационалното уравнение има единствен корен $x = 2$.

б) Дефиниционното множество на уравнението е $DM : x \in [3; 13]$.

Тогава $\underbrace{\sqrt{x-3}+\sqrt{2}}_{+} = \underbrace{\sqrt{13-x}}_{+} \Leftrightarrow x-3+2\sqrt{2x-6}+2 = 13-x \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-6} = 14-2x \Leftrightarrow \sqrt{2x-6} = 7-x$.

При $x \leq 7$ последното уравнение е равносилно на $2x - 6 = 49 - 14x + x^2$

$x^2 - 16x + 55 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 11, x_2 = 5$, като само $x_2 \in DM$ и $x_2 \leq 7$.

Следователно уравнението има единствено решение $x = 5$.

*Забележка*. Кое от числата $x_1 = 11$ и $x_2 = 5$ е корен на даденото уравнение може да установим с директна проверка, без да се налагат ограниченията $x \in [3; 13]$ и $x \leq 7$.

Числото $x = 5$ е решение, тъй като равенството $\sqrt{2}+\sqrt{2} = \sqrt{8}$ е вярно, докато при $x = 11$ се получава невярно числово равенство $\sqrt{8}+\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

в) Дефиниционното множество на уравнението е $x \in [-4; 2]$.

Тогава $\sqrt{4+x}-\sqrt{2-x} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{4+x}}_{+} = \underbrace{\sqrt{2}+\sqrt{2-x}}_{+} \Leftrightarrow 4+x = 2+2\sqrt{4-2x}+2-x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{4-2x} = 2x \Leftrightarrow \sqrt{4-2x} = x \Leftrightarrow 4-2x = x^2,\ x \geq 0 \Leftrightarrow x^2+2x-4=0,\ x \in [0; 2]$.

Корените на $x^2 + 2x - 4 = 0$ са $x_1 = -1+\sqrt{5} \in [0; 2],\ x_2 = -1-\sqrt{5} \notin [0; 2]$.

Следователно уравнението има единствено решение $x = \sqrt{5}-1$.

**3.** а) Уравнението е равносилно на $x^2+3x-7+\sqrt{x^2+3x+5} = 0$.

Полагаме $\sqrt{x^2+3x+5} = u,\ u \geq 0$ и получаваме:

$u^2 - 12 + u = 0 \Leftrightarrow u^2 + u - 12 = 0 \Leftrightarrow u_1 = -4 < 0,\ u_2 = 3 > 0$.

От $\sqrt{x^2+3x+5}=3$ намираме $x^2+3x+5=9 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow x_1=1,\ x_2=-4$.

Следователно уравнението има две решения: $x = 1$ и $x = -4$.

б) Уравнението е равносилно на $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2-3x+5-12=0$.

Полагаме $\sqrt{x^2-3x+5}=u,\ u\geq 0$ и получаваме $u^2 + u - 12 = 0$ с корени $u_1 = -4 < 0$ и $u_2 = 3 > 0$.

От $u = 3$ намираме: $\sqrt{x^2-3x+5}=3 \Leftrightarrow x^2-3x+5=9 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow x_1=-1,\ x_2=4$.

Следователно даденото уравнение има две решения: $x = -1$ и $x = 4$.

в) В уравнението $\sqrt{\dfrac{2\left(x^2-12\right)}{x-4}}=\sqrt{\dfrac{2(x-4)}{x^2-12}}+1$ полагаме $u=\sqrt{\dfrac{x^2-12}{2(x-4)}},\ u>0$.

Решаваме дробното уравнение: $2u=\dfrac{1}{u}+1 \Leftrightarrow 2u^2-u-1=0 \Leftrightarrow u_1=1>0,\ u_2=-\dfrac{1}{2}<0$.

От $u = 1$ намираме $\sqrt{\dfrac{x^2-12}{2(x-4)}}=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-12}{2(x-4)}=1 \Leftrightarrow x^2-12=2x-8 \Leftrightarrow x^2-2x-4=0$

с корени $x_{1,2}=1\pm\sqrt{5}$, които са решенията на даденото уравнение.

## 69. ПРОГРЕСИИ

**1.** а) От $a_5 = a_1 + 4d = 14$ изразяваме и $a_1 = 14 - 4d$, заместваме в равенството

$a_9 = a_1 + 8d = 26 \Leftrightarrow 14 - 4d + 8d = 26 \Leftrightarrow 4d = 12$ и намираме $d = 3$.

Тогава $a_1 = 14 - 4d = 14 - 4.3 = 2$.

б) От $S_9=\dfrac{a_1+a_9}{2}.9 \Leftrightarrow 36=\dfrac{a_1+14}{2}.9 \Leftrightarrow a_1+14=8$ намираме $a_1 = 6$, а от

$a_9 = a_1 + 8d \Leftrightarrow 14 = -6 + 8d \Leftrightarrow 8d = 20$ получаваме $d=\dfrac{5}{2}$.

в) $\left|\begin{array}{l} a_5+a_9=8 \\ a_4+a_{12}=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a_1+4d+a_1+8d=8 \\ a_1+3d+a_1+11d=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2a_1+12d=8 \\ 2a_1+14d=9. \end{array}\right.$

Изваждаме почленно двете уравнения и получаваме $2d = 1$ и $d=\dfrac{1}{2}$.

Тогава $2a_1+12d=8 \Leftrightarrow a_1=4-6d=4-6.\dfrac{1}{2}=4-3=1$.

Следователно $a_1=1,\ d=\dfrac{1}{2}$.

г) $\left|\begin{array}{l} a_3+a_5=5 \\ a_3^2-a_5^2=15 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a_3+a_5=5 \\ \underbrace{\left(a_3+a_5\right)}_{5}\left(a_3-a_5\right)=15 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a_3+a_5=5 \\ 5\left(a_3-a_5\right)=15 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a_3+a_5=5 \\ a_3-a_5=3. \end{array}\right.$

Събираме и изваждаме двете уравнения на последната система и получаваме:

$\left|\begin{array}{l} a_3=4 \\ a_5=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a_1+2d=4 \\ a_1+4d=1 \end{array}\right\}- \Leftrightarrow d=-\dfrac{3}{2},\ a_1=7$.

**2.** а) От $a_3 = a_1q^2 = 2$ и $a_6 = a_1q^5 = 16$ намираме $\frac{a_6}{a_3} = \frac{16}{2} \Leftrightarrow \frac{a_1q^5}{a_1q^2} = 8 \Leftrightarrow q^3 = 8$, $q = 2$ и $a_1 = \frac{2}{q^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

б) От $S_5 - S_4 = a_5 = 25$ и $a_5 - a_3 = 20$ следва, че $a_3 = 5$.

Пресмятаме $\frac{a_5}{a_3} = \frac{25}{5} \Leftrightarrow \frac{a_1q^4}{a_1q^2} = 5 \Leftrightarrow q^2 = 5$ и намираме $q = \pm\sqrt{5}$. Тогава $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{5}{5} = 1$.

в) От $\left| \begin{array}{l} a_5 - a_4 = 576 \\ a_2 - a_1 = 9 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a_1q^4 - a_1q^3 = 576 \\ a_1q - a_1 = 9 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a_1q^3(q-1) = 576 \\ a_1(q-1) = 9 \end{array} \right.$ намираме

$\frac{\cancel{a_1}q^3\cancel{(q-1)}}{\cancel{a_1}\cancel{(q-1)}} = \frac{576}{9} \Leftrightarrow q^3 = 64 \Leftrightarrow q = 4$ и $a_1 = \frac{9}{q-1} = \frac{9}{3} = 3$.

г) Преобразуваме $\left| \begin{array}{l} S_6 - S_3 = 56 \\ S_5 - S_2 = 28 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a_1\frac{q^6-1}{q-1} - a_1\frac{q^3-1}{q-1} = 56 \\ a_1\frac{q^5-1}{q-1} - a_1\frac{q^2-1}{q-1} = 28 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a_1\frac{q^6-q^3}{q-1} = 56 \\ a_1\frac{q^5-q^2}{q-1} = 28 \end{array} \right. \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a_1\frac{q^3(q^3-1)}{q-1} = 56 \\ a_1\frac{q^2(q^3-1)}{q-1} = 28 \end{array} \right.$

и след почленно деление на двете равенства получаваме $q = 2$.

От $a_1\frac{q^2(q^3-1)}{q-1} = 28 \Leftrightarrow a_1\frac{2^2(2^3-1)}{2-1} = 28 \Leftrightarrow 28a_1 = 28$ намираме $a_1 = 1$.

**3.** *I начин.* Нека първите три члена на геометричната прогресия са $x$, $xq$, $xq^2$.

По условие $x + xq + xq^2 = 65$ (1).

Числата $x$, $xq + 10$, $xq^2$ образуват аритметична прогресия.

Тогава $2(xq + 10) = xq^2 + x \Leftrightarrow x - 2xq + xq^2 = 20$ (2).

От (1) и (2) стигаме до системата $\left| \begin{array}{l} x + xq + xq^2 = 65 \\ x - 2xq + xq^2 = 20 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x(1 + q + q^2) = 65 \\ x(1 - 2q + q^2) = 20. \end{array} \right.$

Делим почленно $\frac{\cancel{x}(1+q+q^2)}{\cancel{x}(1-2q+q^2)} = \frac{65}{20}$ и от $\frac{1+q+q^2}{1-2q+q^2} = \frac{13}{4} \Leftrightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0$ намираме $q_1 = 3$ и $q_2 = \frac{1}{3}$.

За числата, образуващи аритметична прогресия, получаваме:

При $q_1 = 3$: $x = \frac{20}{1-2q+q^2} = \frac{20}{4} = 5$ и ÷ 5, 15, 45;

при $q_2 = \frac{1}{3}$: $x = \frac{20}{1-2q+q^2} = \frac{20.9}{4} = 45$ и ÷ 45, 15, 5.

Следователно търсената намаляваща аритметична прогресия е ÷ 45, 15, 5.

*II начин.* Нека първите три члена на намаляващата аритметична прогресия са $x - d$, $x$, $x + d$, като $d < 0$.

Тогава числата $x - d$, $x - 10$, $x + d$ образуват геометрична прогресия.

От $x - d + x - 10 + x + d = 65 \Leftrightarrow 3x = 75 \Leftrightarrow x = 25$ и свойството на геометричната прогресия $(x - 10)^2 = (x - d)(x + d)$ намираме $(25 - 10)^2 = (25 - d)(25 + d) \Leftrightarrow 225 = 625 - d^2 \Leftrightarrow d_2 = 400$ $d_{1,2} = \pm 20$, като решение е само $d = -20$.

Следователно аритметичната прогресия е ÷ 45, 15, 5.

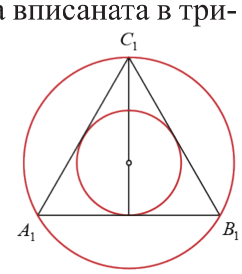
**4.** Да означим с $x$, $xq$, $xq^2$, $xq^3$ числата, образуващи геометричната прогресия. Тогава числата $x$, $xq+1$, $xq^2-2$, $xq^3-13$ образуват аритметична прогресия и

$$\left|\begin{aligned} 2(xq+1) &= x+xq^2-2 \\ 2(xq^2-2) &= xq+1+xq^3-13 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{aligned} x(q^2-2q+1) &= 4 \\ xq(q^2-2q+1) &= 8. \end{aligned}\right.$$

Разделяме почленно двете уравнения и получаваме $q = 2$, след което определяме и $x = 4$.

Тогава геометричната прогресия е 4, 8, 16, 32, а аритметичната: 4, 9, 14, 19.

**5.** За равностранния $\Delta A_1B_1C_1$ $r_1$ е радиусът на описаната окръжност $k_1$, а $r_2$ е радиусът на вписаната в триъгълника окръжност $k_2$. Тогава $r_1 = 2r_2$ ($O$ е и медицентър на $\Delta A_1B_1C_1$) и $\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{1}{2}$.



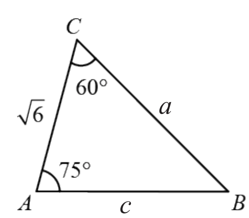

Редицата от радиусите $r_1, r_2, ..., r_8$ е геометрична прогресия с първи член $r_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = 6$ и

частно $q = \dfrac{1}{2}$. Тогава $r_1 + r_2 + ... + r_8 = r_1\dfrac{1-q^8}{1-q} = 6\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^8}{1-\dfrac{1}{2}} = 6.\dfrac{1-\dfrac{1}{256}}{1-\dfrac{1}{2}} = 6.\dfrac{255.2}{256} = \dfrac{765}{64}$ cm.

## 70. РЕШАВАНЕ НА ТРИЪГЪЛНИК

**1.** а) От $\alpha = 75°$ и $\gamma = 60°$ намираме $\beta = 45°$.

Тогава $c = \dfrac{b.\sin\gamma}{\sin\beta} = \dfrac{\sqrt{6}.\sin 60°}{\sin 45°} = \dfrac{\sqrt{6}.\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}.2} = 3$, $a = \dfrac{b.\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{b.\sin 75°}{\sin 60°} = \dfrac{\sqrt{6}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}.4} = \sqrt{3}+1$ и



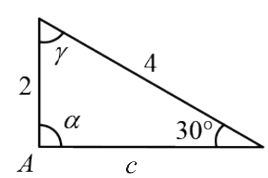

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}bc.\sin\alpha = \dfrac{1}{2}.\sqrt{6}.3.\sin 75° = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}.\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \dfrac{3\left(3+\sqrt{3}\right)}{4}$.

б) *I начин.* От косинусовата теорема за страната $a$ следва, че

$$a^2 = c^2+b^2-2cb.\cos 30° \Leftrightarrow 4 = c^2+16-2c.4.\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow c^2-4\sqrt{3}c+12 = 0 \Leftrightarrow c_{1,2} = 2\sqrt{3} \text{ и } c = 2\sqrt{3}.$$

От $\cos\alpha = \dfrac{c^2+b^2-a^2}{2ca} = \dfrac{12+4-16}{2.2\sqrt{3}.2} = 0$ следва, че $\alpha = 90°$.

Тогава $\gamma = 60°$ и $S_{ABC} = \dfrac{bc}{2} = \dfrac{2.2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.



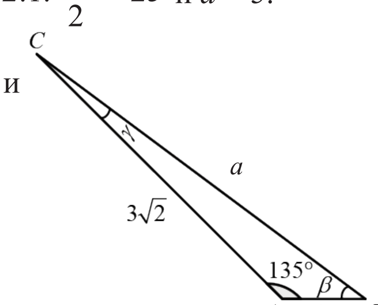

*II начин.* От синусовата теорема $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{a}{\sin\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha = \dfrac{a.\sin\beta}{b} = \dfrac{4.1}{2.2} = 1$

следва, че $\alpha = 90°$ и $AB^2 = BC^2 - AC^2 = 16 - 4 = 12$ и $AB = 2\sqrt{3}$.

в) От косинусовата теорема намираме $a^2 = b^2+c^2-2bc.\cos 135° = 18+1+2.3\sqrt{2}.1.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 25$ и $a = 5$.

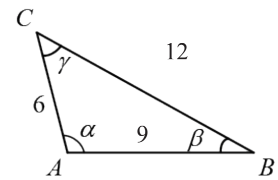
От синусовата теорема пресмятаме $\sin\beta = \dfrac{b.\sin\alpha}{a} = \dfrac{3\sqrt{2}.\sin 135°}{5} = \dfrac{3\sqrt{2}.\sqrt{2}}{5.2} = \dfrac{3}{5}$ и

$\sin\gamma = \dfrac{c.\sin\alpha}{a} = \dfrac{1.\sin 135°}{5} = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$.




Лицето на триъгълника е $S = \dfrac{1}{2}bc.\sin 135° = \dfrac{1}{2}.3\sqrt{2}.1.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3}{2}$.

г) Пресмятаме $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{36+81-144}{2.6.9} = \dfrac{1}{4}$,




$\cos\beta = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \dfrac{81+144-36}{2.9.12} = \dfrac{199}{216}$ и $\cos\gamma = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \dfrac{144+36-81}{2.12.6} = \dfrac{11}{16}$.

Лицето на триъгълника е

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{27}{2}.\left(\frac{27}{2}-12\right).\left(\frac{27}{2}-6\right).\left(\frac{27}{2}-9\right)} = \sqrt{\frac{27}{2}.\frac{3}{2}.\frac{15}{2}.\frac{9}{2}} = \frac{27\sqrt{15}}{4}.$$

**2.** *I начин.* От $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos 60° \Leftrightarrow 5 = 9 + c^2 - 2.3c.\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow c^2 - 3c + 4 = 0$. Последното уравнение няма решение, от което следва, че такъв триъгълник не съществува.

*II начин.* От синусовата теорема следва, че $\sin\beta = \dfrac{b.\sin\alpha}{a} = \dfrac{3.\sin 60°}{\sqrt{5}} = \dfrac{3.\sqrt{3}}{\sqrt{5}.2} = \dfrac{3\sqrt{15}}{10}$.

Равенството $\sin\beta = \dfrac{3\sqrt{15}}{10}$ е невъзможно, тъй като $\dfrac{3\sqrt{15}}{10} > 1$.

Следователно такъв триъгълник не съществува.

## 71. ИЗХОДНО РАВНИЩЕ. ТЕМА ЗА САМОКОНТРОЛ

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Б | Г | В | А | А | $x = -4$ | $AC = 24$ cm | $a : b : c = 3 : 5 : 7$ |

**I част**

**1.** От теорията знаем, че при $g(x) \geq 0$: $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = [g(x)]^2$.

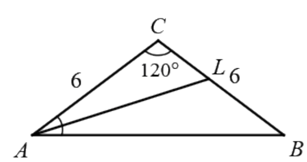
В нашия случай при $x \geq 0$: $\sqrt{4x+1} = x \Leftrightarrow 4x+1 = x^2$ (отг. Б).

**2.** Като вземем предвид, че $a_6 = a_3q^3 \Leftrightarrow -18\sqrt{3} = 6q^3 \Leftrightarrow q^3 = -3\sqrt{3} = \left(-\sqrt{3}\right)^3$ и $q = -\sqrt{3}$, то $a_4 = a_3q = -6\sqrt{3}$ (отг. Г).

**3.** Нека $x$ и $y$ са добавените числа към 8-те числа $a_1, a_2, ..., a_8$.

От $\dfrac{a_1+a_2+...+a_8}{8} = 200$ и $\dfrac{a_1+a_2+...+a_8+x+y}{10} = 250$ следва, че $a_1 + a_2 + ... + a_8 + x + y = 2500 \Leftrightarrow$

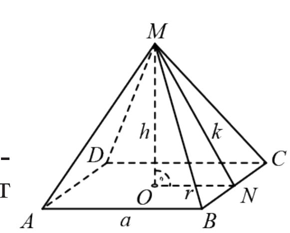
$1600 + x + y = 2500 \Leftrightarrow x + y = 900$ $\dfrac{x+y}{2} = 450$ (отг. В).




**4.** От $\sphericalangle ACB = 120°$ и $AL$ – ъглополовяща в равнобедрения $\Delta ABC$ следва, че $\sphericalangle BAC = 30°$, $\sphericalangle LAC = 15°$ и $\sphericalangle ALC = 45°$.

Прилагаме синусовата теорема за $\Delta ALC$:

$$\frac{AL}{\sin\sphericalangle ACL} = \frac{AC}{\sin\sphericalangle ALC} \Leftrightarrow AL = \frac{AC.\sin 120°}{\sin 45°} = \frac{6.\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{6}\text{ cm (отг. А).}$$




**5.** Нека $a = 6$ cm е основният ръб, $k = 4$ cm е апотемата, а $h$ – височината на правилната четириъгълна пирамида. Тогава радиусът на вписаната в основата окръжност е $r=\frac{a}{2}=3$ cm и от $h^2$ - $k^2-r^2=16-9=7$ намираме $h=\sqrt{7}$ cm (отг. А).

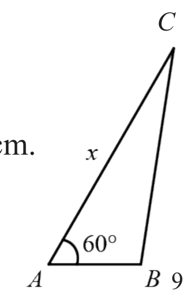
**II част**

**6.** Уравнението представяме във вида $\sqrt{5-x}=-2x-5$, повдигаме двете му страни в квадрат и получаваме:

$$5-x=4x^2+20x+25 \Leftrightarrow 4x^2+21x+20=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-21\pm 11}{8} \Leftrightarrow x_1=-4,\ x_2=-\frac{5}{4}.$$

С проверка установяваме, че само $x=-4$ е корен на ирационалното уравнение.

$x=-4:\ 5+\sqrt{9}=8$ - вярно; $x=-\frac{5}{4}:\ 5+\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$ - невярно.




**7.** От синусовата теорема намираме: $BC=2R\sin\sphericalangle BAC=2R\sin 60^\circ=2.7\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}=21$ cm.

Означаваме $AC=x$ и прилагаме косинусовата теорема:

$$BC^2=AC^2+AB^2-2AC.AB.\cos 60^\circ \Leftrightarrow 441=x^2+81-2x.9.\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2-9x-390=0 \Leftrightarrow x_1=24,\ x_2=-15.$

Следователно $AC=24$ cm.

**III част**

**8.** От ÷ $a$, $b$, $c$ следва, че $a+c=2b$ и $c=2b-a$. От косинусовата теорема за $\Delta ABC$ може да запишем:
$c^2=a^2+b^2-2ab.\cos 120^\circ=a^2+b^2-2ab.\left(-\frac{1}{2}\right)=a^2+b^2+ab$.

Тогава $(2b-a)^2=a^2+b^2+ab \Leftrightarrow 4b^2-4ab+\cancel{a^2}=\cancel{a^2}+b^2+ab \Leftrightarrow 3b^2-5ab=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b(3b-5a)=0 \Leftrightarrow 5a=3b \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{3}{5} \Leftrightarrow a=3k,\ b=5k$.

От $c=2b-a=10k-3k=7k$ намираме, че $a:b:c=3:5:7$.

# СЪДЪРЖАНИЕ

# МАТЕМАТИКА
**книга за учителя за 10. клас**


*Автори*
проф. дмн Емил Колев
Иван Георгиев
Стелиана Кокинова



*Редактор*
Таня Славчева

*Графичен дизайн*
Николай Пекарев

*Коректор*
Яна Червенова

Българска. Първо издание, 2024 г.
Формат 60x90/8. Печатни коли 11,5
ISBN 978-954-18-1430-7E

*Издател*
„КЛЕТ БЪЛГАРИЯ“ ООД
1756 София, ул. „Лъчезар Станчев“ № 5,
комплекс „Софарма Бизнес Тауърс“,
сграда А, ет. 12, тел.: 0700 47 400,
e-mail: info@klett.bg, www.klett.bg

ISBN 978-954-18-1430-7
9 789541 814307