Емил Колев • Иван Георгиев • Стелиана Кокинова

КНИГА ЗА УЧИТЕЛЯ

по математика
за 11. клас

• КЛЕТ БЪЛГАРИЯ •

Книга за учителя
по математика
за 11. клас

Автори
© Емил Миланов Колев, 2020
© Иван Георгиев Георгиев, 2020
© Стелиана Миткова Кокинова, 2020

Графичен дизайн
© Николай Йорданов Пекарев, 2020

Издател
© КЛЕТ БЪЛГАРИЯ, 2020

ISBN 978-954-18-1602-8

ПРИМЕРНИ МЕТОДИЧЕСКИ РАЗРАБОТКИ НА УРОЦИ

УРОК 28. РЕШАВАНЕ НА ЧЕТИРИЪГЪЛНИК

Вид на урока: За нови знания

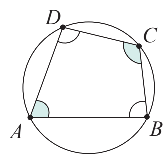
За доказване, че четириъгълник е вписан в окръжност има две условия:
– сбор на срещуположни ъгли, равен на 180°;
– страна, която се вижда под един и същи ъгъл от другите два върха (които са една и съща полуравнина спрямо тази страна).

Формулата за лице на описан четириъгълник чрез полупериметъра и радиуса на вписаната окръжност е аналогична на формулата за лице на триъгълник.

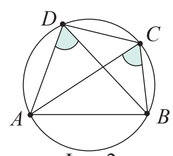
28. РЕШАВАНЕ НА ЧЕТИРИЪГЪЛНИК

ЩЕ НАУЧИТЕ

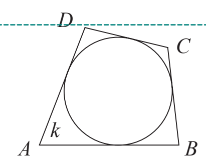
- *Свойствата на вписаните и описаните четириъгълници.*



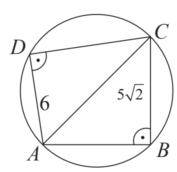
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Да припомним свойствата на вписаните и за описаните четириъгълници.

Вписан четириъгълник

Четириъгълник е вписан в окръжност тогава и само тогава, когато сборът на срещулежащите му ъгли е равен на 180° (фиг. 1).

$ABCD$ е вписан четириъгълник $\Leftrightarrow\ \sphericalangle A + \sphericalangle C = \sphericalangle B + \sphericalangle D = 180^\circ$.

Ако страна на четириъгълник се вижда от останалите два върха под един и същ ъгъл, то четириъгълникът е вписан (фиг. 2).

В четириъгълника $ABCD$ $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB \Rightarrow ABCD$ е вписан.

Описан четириъгълник

Четириъгълник е описан около окръжност тогава и само тогава, когато сборът на две срещуположни страни е равен на сбора на другите две страни (фиг. 3).

$ABCD$ е описан четириъгълник $\Leftrightarrow\ AB + CD = AD + BC$.

Лицето на описан четириъгълник се намира по формулата $S = pr$, където p е полупериметърът на четириъгълника, а r е радиусът на вписаната окръжност.

Решаване на вписан и описан четириъгълник

1. Четириъгълникът $ABCD$ със страни $AD = 6$ cm, $BC = 5\sqrt{2}$ cm и $\sphericalangle D = 90^\circ$ е вписан в окръжност k с радиус $R = 5$ cm. Да се намерят лицето и страните AB и CD на четириъгълника.
Решение. От $\sphericalangle D = 90^\circ$ следва, че AC е диаметър на k и $\sphericalangle B = 90^\circ$.
От питагоровата теорема намираме

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{100-36} = 8 \text{ cm и}$$

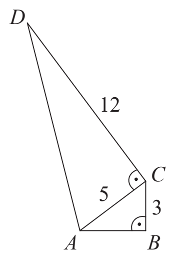
$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{100-50} = 5\sqrt{2} \text{ cm. Тогава}$$

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{AB.BC}{2} + \frac{CD.AD}{2} = \frac{\left(5\sqrt{2}\right)^2}{2} + \frac{8.6}{2} = 49 \text{ cm}^2.$$

81

Когато един от ъглите на вписан четириъгълник е равен на 90°, съответният диагонал е диаметър на окръжността.

УРОК 28. РЕШАВАНЕ НА ЧЕТИРИЪГЪЛНИК



Фиг. 5

2. Четириъгълник $ABCD$ със страни $BC = 3$ cm, $CD = 12$ cm, диагонал $AC = 5$ cm и $\sphericalangle ABC = 90^\circ$ е описан около окръжност. Да се намерят лицето на четириъгълника и радиуса на окръжността.

Решение. От питагоровата теорема в правоъгълния ΔABC намираме $AB = 4$ cm. Тъй като $ABCD$ е описан, от равенството

$AB + CD = AD + BC$ определяме $AD = 12 + 4 - 3 = 13$ cm.

В ΔACD от равенството $AD^2 = AC^2 + CD^2$ $\left(13^2 = 5^2 + 12^2\right)$ следва, че $\sphericalangle ACD = 90^\circ$. Тогава

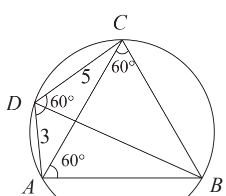
$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{AB.BC}{2} + \frac{AC.CD}{2} = \frac{4.3}{2} + \frac{5.12}{2} = 36 \text{ cm}^2.$$

От $S_{ABCD} = pr$ и $p = AB + CD = 16$ намираме

$$r = \frac{S_{ABCD}}{p} = \frac{36}{16} = \frac{9}{4} \text{ cm}.$$

При решаване на четириъгълник условието за описан четириъгълник често се комбинира с питагорова, косинусова или синусова теорема.

За намиране на радиуса на вписаната в четириъгълник окръжност много често се използва формулата за лице $S = p.r$. За целта трябва да знаем периметъра на четириъгълника и неговото лице.



Фиг. 6

3. Четириъгълникът $ABCD$ със страни $AD = 3$ cm, $CD = 5$ cm и $\sphericalangle ADC = 120^\circ$ е вписан в окръжност, а диагоналът BD е ъглополовяща на $\sphericalangle ADC$. Да се намерят страните AB и BC и лицето на $ABCD$.

Решение. От косинусовата теорема за ΔACD намираме

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD.CD.\cos 120^\circ = 9 + 25 + 2.3.5.\frac{1}{2} = 49$$

и $AC = 7$ cm.

От $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC = 60^\circ$ и равенствата на вписаните ъгли

$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = \sphericalangle ADB = 60^\circ$, $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = \sphericalangle BDC = 60^\circ$

следва, че ΔABC е равностранен и $AB = BC = AC = 7$ cm.

Пресмятаме

$$S_{ACD} = \frac{1}{2}AD.CD.\sin 120^\circ = \frac{1}{2}.3.5.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4},$$

$$S_{ABC} = \frac{AC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{49\sqrt{3}}{4} \text{ и}$$

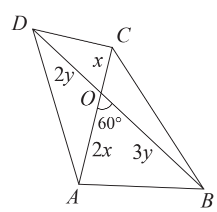
$$S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{ABC} = \frac{15\sqrt{3}}{4} + \frac{49\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

При решаване на четириъгълника се използва косинусова теорема и равенство но вписани ъгли.

Задачата илюстрира как с използване на формулата за лице се получава система за неизвестните диагонали.

Решаване на произволен четириъгълник

4. Лицето на четириъгълник $ABCD$ е $15\sqrt{3}$ cm², а диагоналите му се пресичат в точка O, като $AO = 2CO$, $BO:DO = 3:2$ и $\sphericalangle AOB = 60°$. Да се намерят дължините на диагоналите, ако сборът им е 16 cm.



Фиг. 7

Решение. Означаваме $AO = 2x$, $CO = x$, $BO = 3y$ и $DO = 2y$. Тогава $AC = 3x$, $BD = 5y$ и $AC + BD = 3x + 5y = 16$ cm. Имаме

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD.\sin 60° \Leftrightarrow 15\sqrt{3} = \frac{1}{2}.3x.5y.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

следователно, $xy = 4$. Като заместим $x = \frac{16-5y}{3}$, получаваме уравнението

$$\frac{(16-5y)y}{3} = 4 \Leftrightarrow 5y^2 - 16y + 12 = 0$$

с корени $y_1 = 2$ и $y_2 = \frac{6}{5}$. Съответните стойности на x са

$$x_1 = \frac{16-5y_1}{3} = 2 \text{ и } x_2 = \frac{16-5y_2}{3} = \frac{10}{3}.$$

Следователно $AC = 3x_1 = 6$ cm, $BD = 5y_1 = 10$ cm или $AC = 3x_2 = 10$ cm, $BD = 5y_2 = 6$ cm.

ЗАДАЧИ

1. Намерете лицето на четириъгълник $ABCD$, вписан в окръжност с радиус $R = 2$ cm, ако е известно, че $AC = 4$ cm, $CD = 2$ cm и $AB = BC$.

2. Четириъгълник $ABCD$ с диагонали $AC = 12$ cm и $BD = 9$ cm е вписан в окръжност. Да се намери лицето на четириъгълника, ако $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle ACD = 40°$.

3. Намерете лицето на четириъгълник $ABCD$ със страни $AD = 5$ cm и $BC = 7$ cm, описан около окръжност с радиус 3 cm.

4. Спортна площадка има формата на четириъгълник с периметър 90 m, описан около кръг с радиус 10 m. В кръга са разположени фитнес уреди, а останалата част е затревена. Намерете с точност 0,1 затревената площ $(\pi \approx 3{,}142)$.

5. Четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност и има периметър 18 cm. Намерете лицето на четириъгълника и радиуса на окръжността, ако $AB = 7$ cm, $AD = 4$ cm и $\sphericalangle BAD = 60°$.

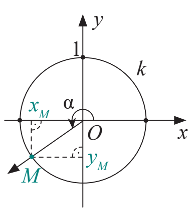
83

УРОК 35. ОСНОВНИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ТЪЖДЕСТВА

35. ОСНОВНИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ТЪЖДЕСТВА

ЩЕ НАУЧИТЕ

- *Основни тригонометрични тъждества за обобщен ъгъл.*



Фиг. 1

За ъгли $\alpha \in [0°;180°]$ доказахме, че $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Ще проверим твърдението за произволен ъгъл α.

ТЕОРЕМА. За всички стойности на α е изпълнено тъждеството $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Доказателство: Нека α е произволно реално число, а M е единствената пресечна точка на второто рамо на α с единичната окръжност k (фиг. 1). Пресечната точка на второто рамо на ъгъл α с единичната окръжност, когато първото рамо на α съвпада с положителната абсцисна полуос, има ордината sin α и абсциса cos α, т.е. $\sin\alpha = y_M$ и $\cos\alpha = x_M$. От правоъгълния ΔOMX_M (или от ΔOMY_M) по питагоровата теорема получаваме

$$OX_M^2 + MX_M^2 = OM^2 \Leftrightarrow |x_M|^2 + |y_M|^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$|\cos\alpha|^2 + |\sin\alpha|^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

От определенията за tg α cotg α следва, че равенството

$$\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$$

е изпълнено за всички стойности на α, без числата $k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ (т.е. за числата, за които tg α и cotg α имат смисъл).

1. Да се докаже тъждеството:

а) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$;

б) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha} = 1 + \cos\alpha, \quad \alpha \neq 2k\pi$;

в) $\sqrt{1 - 2\sin\alpha\cos\alpha} = |\sin\alpha - \cos\alpha|$;

г) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} + \dfrac{1}{\operatorname{cotg}^2\alpha + 1} = 1, \quad \alpha \neq k\dfrac{\pi}{2}$.

Решение. а) Имаме

$$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha \Leftrightarrow$$

$$(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)\underbrace{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}_{1} = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha,$$

което очевидно е изпълнено.

101

Основното тригонометрично тъждество дава връзка между квадратите на синуса и косинуса на даден ъгъл. Важно е да се запомни, че когато е дадена стойността на едната от двете функции, може да се намери квадратът на другата.

При доказване на тъждества се стремим да разложим даден израз така, че да получим сбор от квадрати на синус и косинус.

Понякога е необходимо да представим числото 1 като сбор от квадрати на синус и косинус на подходящ ъгъл.

б) Изразът $A=\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}$ е определен, когато

$$1-\cos\alpha\neq 0 \Leftrightarrow \cos\alpha\neq 1.$$

Това условие е изпълнено, тъй като по условие $\alpha\neq 2k\pi$. Тогава

$$\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}\overset{\alpha\neq 2k\pi}{=}1+\cos\alpha.$$

в) Знаем, че $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, следователно

$$\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=|\sin\alpha-\cos\alpha|.$$

г) Имаме

$$\mathrm{tg}^2\alpha+1=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

и аналогично $\mathrm{cotg}^2\alpha+1=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$, затова

$$\frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha+1}+\frac{1}{\mathrm{cotg}^2\alpha+1}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}+\frac{1}{\frac{1}{\sin^2\alpha}}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

ЗАДАЧИ

1. Докажете тъждествата:

а) $1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=0$;

б) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\cos\alpha+\sin\alpha,\ \alpha\neq\dfrac{\pi}{4}+k\pi$;

в) $\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha$, $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$;

г) $\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}+\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=2\sin\alpha$, $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$;

д) $\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=-\dfrac{1}{\cos\alpha},\ \alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$;

е) $\dfrac{\mathrm{cotg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2\alpha}}=-\cos\alpha,\ \alpha\in\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

53. МОДЕЛИ НА МНОГОКРАТНИ ЕКСПЕРИМЕНТИ С ДВА ВЪЗМОЖНИ ИЗХОДА. УПРАЖНЕНИЕ

ЩЕ УПРАЖНИТЕ

- *Как се пресмята вероятност при схема на Бернули*

Нека при извършване на някакъв опит вероятността да настъпи дадено събитие A е p. Противоположното събитие на A се бележи с $\overline{A}$, като то настъпва с вероятност $q = 1 - p$. При извършване на n опита, вероятността събитието A да настъпи k пъти, е равна на

$$C_n^k.p^k(1-p)^{n-k} = C_n^k.p^k.q^{n-k}.$$

За прилагане на дадената формула е необходимо да знаем n, k и p.

1. Всеки ден вероятността да вали е $\frac{1}{4}$. Каква е вероятността за една седмица:

а) да не вали нито веднъж;

б) да вали в точно 3 дни?

Решение. Имаме схема на Бернули за $n = 7$, $p = \frac{1}{4}$ и $q = \frac{3}{4}$.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!.(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

Двата варианта за пресмятане на комбинации. За по-лесно запомняне на втората формула трябва да се отбележи, че броят на множителите в числителя е равен на k.

а) Тъй като $k = 0$, за търсената вероятност получаваме:

$$C_7^0 p^0.q^7 = \left(\frac{3}{4}\right)^7 \approx 0{,}1335.$$

б) При $k = 3$ получаваме:

$$C_7^3 p^3.q^4 = \frac{7.6.5}{1.2.3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^4 = 35.\frac{3^4}{4^7} \approx 0{,}1730.$$

2. Вероятността ученик да бъде изпитан през един учебен ден е $\frac{2}{5}$. Намерете вероятността за две седмици ученик:

а) да е изпитван всеки ден;

б) да е изпитан 5 или 6 пъти;

в) да е изпитан поне веднъж.

Решение. Учебните дни за две седмици са 10. Разглеждаме схема на Бернули за $n = 10$, $p = \frac{2}{5}$ и $q = \frac{3}{5}$.

а) При $k = 10$ получаваме $C_{10}^{10} p^{10}.q^0 = \left(\frac{2}{5}\right)^{10} \approx 0{,}0001$.

147

За да разберем, че има схема на Бернули, трябва да имаме повторение на един и същ експеримент. В случая това е изпитването всеки ден, което настъпва с определена вероятност.

б) При $k = 5$ и 6 получаваме

$$C_{10}^5 p^5.q^5 + C_{10}^6 p^6.q^4 = \frac{10.9.8.7.6}{5.4.3.2.1}.\left(\frac{2}{5}\right)^5\left(\frac{3}{5}\right)^5 + \frac{10.9.8.7}{4.3.2.1}.\left(\frac{2}{5}\right)^6\left(\frac{3}{5}\right)^4,$$

което е приблизително 0,3121.

в) Вероятността за 10 дни ученик да не бъде изпитан нито един път е равна на $\left(\frac{3}{5}\right)^{10}$.

Събитието да бъде изпитан поне един път, което съответства на $k = 1, 2, \ldots, 10$, е противоположно на събитието да не бъде изпитан нито един път. Следователно търсената вероятност е равна на

$$1-\left(\frac{3}{5}\right)^{10} \approx 0,99395.$$

Много често за намиране на вероятността дадено събитие да настъпи поне един път, първо се намира вероятността на противоположното събитие – събитието да не настъпи нито веднъж. След това се използва, че сборът от вероятностите на противоположни събития е равен на 1.

3. В кутия са поставени 9 картички с цифрите 1,2,…,9. По случаен начин се избира една картичка, числото върху нея се записва и картичката се връща обратно в кутията. По този начин се записват 5 числа. Намерете вероятността измежду записаните цифри четните да са повече от нечетните.

Решение. Тъй като четните цифри са 4, вероятността да се случи събитието A = **избира се четно число** е $\frac{4}{9}$.

Четните числа са повече от нечетните, когато техният брой е 3, 4 или 5. За схемата на Бернули имаме $n = 5$, $p = \frac{4}{9}$ и $k = 3$, 4 или 5. Търсената вероятност е

$$C_5^3 p^3.q^2 + C_5^4 p^4.q + C_5^5 p^5.$$

Тъй като $C_5^3 = 10$, $C_5^4 = 5$, $C_5^5 = 1$, получаваме

$$10.\left(\frac{4}{9}\right)^3\left(\frac{5}{9}\right)^2 + 5.\left(\frac{4}{9}\right)^4\left(\frac{5}{9}\right)^1 + \left(\frac{4}{9}\right)^5 \approx 0,3967.$$

4. За всеки изпит студент научава една трета от всички въпроси. Ако на изпит са пада един въпрос, а в изпитната сесия има 7 изпита, намерете вероятността да бъде скъсан на най-много един изпит.

Решение. Тъй като студентът знае една трета от всички въпроси и на изпита се пада един въпрос, вероятността да вземе даден изпит е $\frac{1}{3}$.

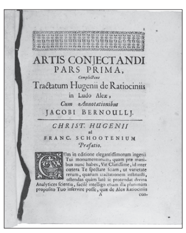
За да бъде скъсан на най-много един изпит, той трябва да вземе 6 или 7 изпита. Следователно имаме схема на Бернули за

$$n=7,\ p=\frac{1}{3},\ q=\frac{2}{3}\ \text{и}\ k=6\ \text{или}\ 7.$$

В тази задача е необходимо внимателно да се определят параметрите на схемата на Бернули.

Следователно търсената вероятност е равна на:

$$C_7^6\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^1+\left(\frac{1}{3}\right)^7=\frac{7.2+1}{3^7}\approx 0,007.$$



Изкуство на предположенията

Якоб Бернули (1654 – 1705) е швейцарски математик, най-възрастният член на математическата династия Бернули. Неговата статия *„Изкуство на предположенията“* е едно от първите изследвания по теория на вероятностите. В нея е описана и комбинаторната задача за серия от независими опити с два възможни изхода, станала известна като схема на Бернули.

ЗАДАЧИ

1. Вероятността даден подарък да се хареса е 0,8. Каква е вероятността от 6 подаръка да се харесат точно два?

2. Ученик отговаря по случаен начин на въпросите от тест с 15 въпроса с по 4 възможни отговора. За всяко $k = 0, 1, 2, 15$ намерете вероятността да познае точно k отговора.

3. Колело на късмета с 5 сектора, един от които носи печалба, се завърта 10 пъти. Каква е вероятността:

а) нито веднъж да не се падне печалба;

б) да се падне печалба точно 8 пъти?

4. От кутия с 3 зелени и 5 сини топки се изважда една топка, цветът и се запомня и тя се връща в кутията. Намерете вероятността след 10 опита да са извадени:

а) точно 8 зелени топки;

б) точно 6 сини топки.

5. Всеки ден вероятността да вали е равна на 0,2. Каква е вероятността през седмицата да вали точно през четири дни, един от които е понеделник?

6*. От кутия с 5 зелени и 3 червени топки се изваждат две топки, след което двете топки се връщат в кутията. Да се намери вероятността при 6 изваждания:

а) 3 пъти да са извадени топки с еднакъв цвят;

б) 2 пъти да са извадени топки с различен цвят;

в) поне веднъж да са извадени едноцветни топки.

149

ВАРИАНТИ ЗА ДИАГНОСТИКА НА РЕЗУЛТАТИ ОТ ОБУЧЕНИЕТОПО МАТЕМАТИКА В 11. КЛАС

ПРИМЕРНА КЛАСНА РАБОТА ЗА ПЪРВИЯ УЧЕБЕН СРОК

ВАРИАНТ 1

I част

1. Стойността на $\sqrt{2\sqrt[3]{5}}$ е равна на:

А) $\sqrt[6]{5}$ Б) $\sqrt[6]{10}$ В) $\sqrt[6]{30}$ Г) $\sqrt[6]{40}$

2. Ако $a < 0 < b$, то изразът $\sqrt[3]{(a-b)^3} + \sqrt[4]{a^4} - \sqrt{(a-b)^2}$ е тъждествено равен на:

А) $-a$ Б) a В) $a - 2b$ Г) $2b - a$

3. Коя от посочените функции има най-голяма стойност при $x = -2{,}1$?

А) $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ Б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ В) 2^x Г) 3^x

4. Ако $\lg 2 = a$ и $\lg 5 = b$, то:

А) $\lg(a + b) = 0$ Б) $10^a + 10^b = 10^7$ В) $ab = \lg 25$ Г) $b - a = \lg 3$

5. Даден е успоредник със страни a и b и диагонали d_1 и d_2. Ако $a^2 + b^2 = 52$ и $d_1 + d_2 = 16$, произведението $d_1 d_2$ е:

А) 24 Б)40 В) $8\sqrt{26}$ Г) 76

II част

6. При $a > 0$ опростете израза $\sqrt[3]{a^{\frac{1}{3}}}\sqrt{a^{\frac{1}{6}}\sqrt{a^{-\frac{2}{3}}}}$.

7. Представете с един логаритъм числото $m = \log_2 5 + 2\log_4 3$.

III част

8. Четириъгълникът $ABCD$ със страни $AB = 3$ cm, $AD = CD = 2$ cm и $\sphericalangle BAD = 60^\circ$ е вписан в окръжност. Намерете дължината на страната BC и лицето на четириъгълника.

ПРИМЕРНА КЛАСНА РАБОТА ЗА ПЪРВИЯ УЧЕБЕН СРОК

ВАРИАНТ 2

I част

1. В кой от посочените случаи е извършено правилно внасянето на множител под знака на корена $x.\sqrt[4]{-x}$?

А) $-\sqrt[4]{x^5}$ Б) $\sqrt[4]{-x^5}$ В) $-\sqrt[4]{-x^5}$ Г) $\sqrt[4]{x^5}$

2. След рационализиране на знаменателя на дробта $\dfrac{4}{\sqrt[3]{5}-1}$ се получава изразът:

А) $\sqrt[3]{5}+1$ Б) $\sqrt[3]{5}-1$ В) $\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1$ Г) $\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1$

3. Кое от посочените числа е най-голямо?

А) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ Б) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$ В) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ Г) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

4. Кое от посочените числа е най-голямо при $x = 0,3$?

А) $\log_{0,1}x$ Б) $\log_{0,2}x$ В) $\log_2 x$ Г) $\lg x$

5. Страните на успоредник са 15 cm и 26 cm, а единият от диагоналите му е 37 cm. Лицето на успоредника е равно на:

А) 156 cm^2 Б) 280 cm^2 В) 312 cm^2 Г) 400 cm^2

II част

6. Пресметнете стойността на израза $A=\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}.\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt[3]{125}}.\sqrt[3]{-10}.\sqrt[6]{4}}$.

7. Пресметнете стойността на израза $A=\dfrac{\log_5 36}{\log_5 6}-\log_4 25.\log_5\sqrt{2}$.

III част

8. Намерете лицето на трапец $ABCD$ с основи $AB = 20$ cm, $CD = 6$ cm и бедра $AD = 13$ cm и $BC = 15$ cm.

ВАРИАНТ I

I част

1. Стойността на израза cos10°cos20° − sin10°sin20° е равна на:

А) $\frac{1}{2}$ Б) $-\frac{1}{2}$ В) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. За допустимите стойности на α изразът $2\cos 2\alpha - \frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$ е равен на:

А) −cosα Б) cosα В) cos2α Г) 0

3. Коя е най-голямата стойност на функцията $y = 3\sin 3\alpha$ за $\alpha \in (0°; 90°)$?

А) 9 Б) 3 В) 1 Г) 0

4. Вероятността да се избере момче от клас с 28 ученици е $\frac{3}{7}$. Колко са момичетата в класа?

А) 12 Б) 14 В) 16 Г) 18

5. Върху отсечка *AB* с дължина 30 cm по случаен начин се избира точка *X*. Каква е вероятността на събитието $AX < 8$ cm?

А) $\frac{1}{6}$ Б) $\frac{2}{15}$ В) $\frac{11}{15}$ Г) $\frac{4}{15}$

II част

6. Ако $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{2}{5}$, да се намери стойността на израза $A = \frac{9}{1+\sin 2\alpha}$.

7. Каква е вероятността при 5 хвърляния на зар да се падне три пъти число, което се дели на 3?

III част

8. В ΔABC са дадени $\alpha = \frac{5\pi}{8}$ и $\beta = \frac{\pi}{8}$. Да се докаже, че cotgα + cotgβ + cotgγ = 3.

ВАРИАНТ II

I част

1. Стойността на израза $\sin 40°\cos 10° - \cos 40°\sin 10°$ е равна на:

А) $\frac{1}{2}$ Б) $-\frac{1}{2}$ В) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. За допустимите стойности на α изразът $\frac{1}{\cos 2\alpha} - \frac{1+\mathrm{tg}^2\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$ е равен на:

А) $-\cos\alpha$ Б) $\cos\alpha$ В) $\cos 2\alpha$ Г) 0

3. Коя е най-малката стойност на функцията $y = \frac{1}{2}\cos 2\alpha$ за $\alpha \in [0°; 90°]$?

А) –2 Б) $-\frac{1}{2}$ В) –1 Г) 0

4. Вероятността да се избере момиче от клас с 25 ученици е $\frac{3}{5}$. Колко са момчетата в класа?

А) 8 Б) 10 В) 12 Г) 14

5. Върху отсечка AB с дължина 28 cm по случаен начин се избира точка X. Каква е вероятността на събитието $AX < 7$ cm?

А) $\frac{1}{6}$ Б) $\frac{1}{4}$ В) $\frac{2}{7}$ Г) $\frac{3}{14}$

II част

6. Ако $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$, да се намери стойността на израза $B = \frac{8}{1+\cos 2\alpha}$.

7. Каква е вероятността при 5 хвърляния на зар да се падне два пъти число, което не се дели на 3?

III част

8. В ΔABC са дадени $\alpha = \frac{5\pi}{8}$ и $\beta = \frac{\pi}{8}$. Да се докаже, че $\mathrm{cotg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\beta - \mathrm{cotg}\,\gamma = 1$.

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ ВАРИАНТИТЕ ЗА ДИАГНОСТИКА НА РЕЗУЛТАТИ ОТ ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА В 11. КЛАС

ПРИМЕРНА КЛАСНА РАБОТА ЗА ПЪРВИЯ УЧЕБЕН СРОК

ВАРИАНТ 1

I част

1. Стойността на $\sqrt{2\sqrt[3]{5}}$ е равна на:

А) $\sqrt[6]{5}$ Б) $\sqrt[6]{10}$ В) $\sqrt[6]{30}$ Г) $\sqrt[6]{40}$

Решение: $\sqrt{2\sqrt[3]{5}}=\sqrt{\sqrt[3]{2^3.5}}=\sqrt{\sqrt[3]{40}}=\sqrt[6]{40}$ (отг. Г).

2. Ако $a<0<b$, то изразът $\sqrt[3]{(a-b)^3}+\sqrt[4]{a^4}-\sqrt{(a-b)^2}$ е тъждествено равен на:

А) $-a$ Б) a В) $a-2b$ Г) $2b-a$

Решение: $A=\sqrt[3]{(a-b)^3}+\sqrt[4]{a^4}-\sqrt{(a-b)^2}=a-b+|a|-|a-b|$.

По условие $a<0$ и $a<b \Leftrightarrow 0-b<0$.

Тогава $|a|=-a$, $|a-b|=b-a$ и $A=a-b-a-(b-a)=a-2b$ (отг. В).

3. Коя от посочените функции има най-голяма стойност при $x=-2{,}1$?

А) $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ Б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ В) 2^x Г) 3^x

Решение: От свойствата на показателната функция $y=a^x$ при фиксирана отрицателна стойност на x (в случая $x=-2{,}1$), най-голяма ще е стойността, когато основата а е най-малка. В случая това е $a=\frac{1}{3}$ (отг. Б).

4. Ако $\lg 2=a$ и $\lg 5=b$, то:

А) $\lg(a+b)=0$ Б) $10^a+10^b=10^7$ В) $ab=\lg 25$ Г) $b-a=\lg 3$

Решение: Отговорът на задачата е А), тъй като $a+b=\lg 2+\lg 5=\lg 2.5=\lg 10=1$ и $\lg(a+b)=\lg 1=0$.

5. Даден е успоредник със страни a и b и диагонали d_1 и d_2. Ако $a^2+b^2=52$ и $d_1+d_2=16$, произведението d_1d_2 е:

А) 24 Б) 40 В) $8\sqrt{26}$ Г) 76

Решение: Пресмятаме $d_1^2+d_1^2=2\left(a^2+b^2\right)=2.52=104$, повдигаме двете страни на равенството $d_1+d_2=16$ в квадрат и получаваме $\left(d_1+d_2\right)^2=256 \Leftrightarrow \underbrace{d_1^2+d_2^2}_{104}+2d_1d_2=256 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2d_1d_2=152 \Leftrightarrow d_1d_2=76$ (отг. Г).

II част

6. При $a > 0$ опростете израза $\sqrt[3]{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a^{\frac{1}{6}}\sqrt{a^{-\frac{2}{3}}}}}$.

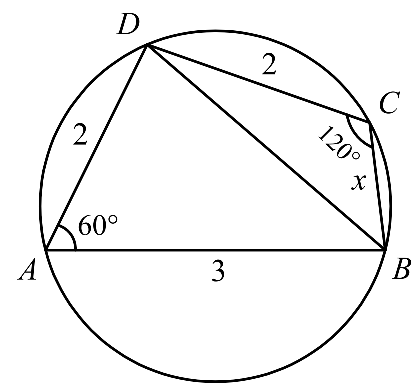
Решение: $\sqrt[3]{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a^{\frac{1}{6}}\sqrt{a^{-\frac{2}{3}}}}} = a^{\frac{1}{3.3}}.\sqrt{a^{\frac{1}{6}}.a^{-\frac{2}{3.2}}} = a^{\frac{1}{9}}\sqrt{a^{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{9}}.\sqrt{a^{-\frac{1}{6}}} = a^{\frac{1}{9}}.a^{-\frac{1}{12}} = a^{\frac{1}{9}-\frac{1}{12}} = a^{\frac{1}{36}} = \sqrt[36]{a}$.

7. Представете с един логаритъм числото $m = \log_2 5 + 2\log_4 3$.

Решение: $m = \log_2 5 + 2\log_4 3 = \log_2 5 + 2\log_{2^2} 3 = \log_2 5 + \frac{2}{2}\log_2 3 = \log_2 5 + \log_2 3 = = \log_2 5.3 = \log_2 15$.

III част

8. Четириъгълникът $ABCD$ със страни $AB = 3$ cm, $AD = CD = 2$ cm и $\sphericalangle BAD = 60^\circ$ е вписан в окръжност. Намерете дължината на страната BC и лицето на четириъгълника.



Решение: От косинусовата теорема за ΔABD намираме

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos 60^\circ = 9 + 4 - 2.3.2.\frac{1}{2} = 7$.

Четириъгълникът $ABCD$ е вписан и $\sphericalangle BCD = 120^\circ$.

Да означим $BC = x$ и да приложим косинусовата теорема за ΔBCD:

$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC.CD.\cos 120^\circ \Leftrightarrow 7 = x^2 + 4 + 2x.2.\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -3$ и следователно $BC = 1$ cm.

Лицето на четириъгълника е

$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}AB.AD.\sin 60^\circ + \frac{1}{2}BC.CD.\sin 120^\circ =$

$= \frac{1}{2}.3.2.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.1.2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm^2.

ОТГОВОРИ

Зад. 1: Г), Зад. 2: В), Зад. 3: Б), Зад. 4: А), Зад. 5: Г).

Зад. 6: $a^{\frac{1}{36}}$ или $\sqrt[36]{a}$, Зад. 7: $\log_2 15$, Зад. 8: $BC = 1$ cm, $S_{ABCD} = 2\sqrt{3}$ cm^2.

ПРИМЕРНА КЛАСНА РАБОТА ЗА ПЪРВИЯ УЧЕБЕН СРОК

ВАРИАНТ 2

I част

1. В кой от посочените случаи е извършено правилно внасянето на множител под знака на корена $x.\sqrt[4]{-x}$?

А) $-\sqrt[4]{x^5}$ Б) $\sqrt[4]{-x^5}$ В) $-\sqrt[4]{-x^5}$ Г) $\sqrt[4]{x^5}$

Решение: Дефиниционното множество на израза е $x \le 0$.

I начин.Тогава $x.\sqrt[4]{-x} = -(-x)\sqrt[4]{-x} = -\sqrt[4]{(-x)^4(-x)} = -\sqrt[4]{(-x)^5} = -\sqrt[4]{-x^5}$ (отг. В).

II начин. Корените от А) и Б) съществуват при $x \ge 0$ и отпадат като възможни отговори. Като вземем предвид, че $x.\sqrt[4]{-x} \le 0$, от останалите две възможности само $-\sqrt[4]{-x^5} \le 0$ и отговорът на задачата е В).

2. След рационализиране на знаменателя на дробта $\dfrac{4}{\sqrt[3]{5}-1}$ се получава изразът:

А) $\sqrt[3]{5}+1$ Б) $\sqrt[3]{5}-1$ В) $\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1$ Г) $\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1$

Решение: $\dfrac{4}{\sqrt[3]{5}-1} = \dfrac{4\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{5}-1\right)\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1\right)} = \dfrac{4\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3-1} = \dfrac{4\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1\right)}{4} = = \sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1$ (отг. В).

3. Кое от посочените числа е най-голямо?

А) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ Б) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$ В) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ Г) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

Решение: Показателната функция $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ намалява и най-голямото от посочените числа е това с най-малък степенен показател: $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ – отг. А).

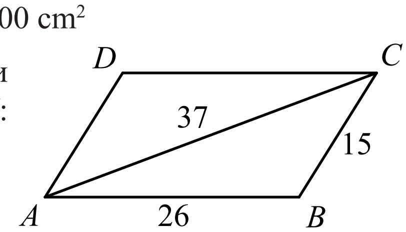
4. Кое от посочените числа е най-голямо при $x = 0{,}3$?

А) $\log_{0,1}x$ Б) $\log_{0,2}x$ В) $\log_2 x$ Г) $\lg x$

Решение: От свойствата на логаритмичната функция $\log_a x$ при фиксирана стойност $0 < x < 1$ (в случая $x = 0{,}3$), най-голяма ще е стойността, когато основата $a \in (0; 1)$ е най-голяма. В случая това е $x = 0{,}2$ (отг. Б).

5. Страните на успоредник са 15 cm и 26 cm, а единият от диагоналите му е 37 cm. Лицето на успоредника е равно на:

А) 156 cm² Б) 280 cm² В) 312 cm² Г) 400 cm²



Решение: Нека $ABCD$ е успоредник със страни $AB = 26$ cm, $BC = 15$ cm и диагонал $AC = 37$ cm. По хероновата формула пресмятаме лицето на ΔABC:

$p = 39$ и $S_{ABC} = \sqrt{39.13.24.2} = \sqrt{3^2.13^2.4^2} = 12.13 = 156$ cm².

Тогава $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 312$ cm². (отг. В).

II част

6. Пресметнете стойността на израза $A=\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}.\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt[3]{125}}.\sqrt[3]{-10}.\sqrt[6]{4}}$.

Решение: $A=\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}.\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt[3]{125}}.\sqrt[3]{-10}.\sqrt[6]{4}}=\dfrac{\sqrt[3]{5}.\cancel{\sqrt{5}}}{-\cancel{\sqrt{5}}.\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{10}\right).\sqrt[3]{2}}=-\sqrt[3]{\dfrac{5}{2.10.2}}=-\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}=-\dfrac{1}{2}$.

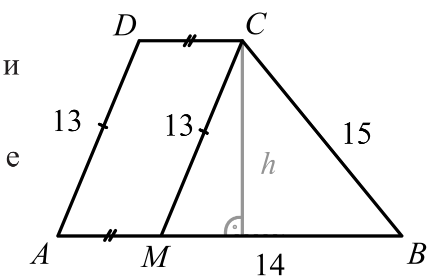
7. Пресметнете стойността на израза $A=\dfrac{\log_5 36}{\log_5 6}-\log_4 25.\log_5\sqrt{2}$.

Решение: $A=\dfrac{\log_7 36}{\log_7 6}-\log_4 25.\log_5\sqrt{2}=\log_6 36-\log_{2^2}5^2.\log_5 2^{\frac{1}{2}}=$

$=2-\left(\dfrac{2}{2}\log_2 5\right).\left(\dfrac{1}{2}\log_5 2\right)=2-\dfrac{1}{2}\log_2 5.\log_5 2=2-\dfrac{1}{2}\log_2 2=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

III част

8. Намерете лицето на трапец $ABCD$ с основи AB = 20 cm, CD = 6 cm и бедра AD = 13 cm и BC = 15 cm.



Решение: През точка C построяваме отсечка $CM \| AD$ ($M \in AB$) и нека h е височината на трапеца.

В успоредника $AMCD$ $AM = CD$ = 6 cm и $MC = AD$ = 13 cm.

По хероновата формула пресмятаме лицето на ΔMBC със страни

MC = 13 cm, MB = 14 cm и BC = 15 cm:

$S_{MBC}=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}=\sqrt{21.8.7.6}=\sqrt{3.7.8.7.2.3}=\sqrt{3^2.4^2.7^2}=3.4.7=84$.

От $S_{MBC}=\dfrac{MB.h}{2}$ намираме $h=\dfrac{2S_{MBC}}{MB}=\dfrac{2.84}{14}=12$ cm.

Следователно $S_{ABCD}=\dfrac{AB+CD}{2}.h=\dfrac{20+6}{2}.12=26.6=156$ cm^2.

ОТГОВОРИ

Зад. 1: Г), Зад. 2: Г), Зад. 3: В), Зад. 4: Г), Зад. 5: Б).

Зад. 6: $A=-\dfrac{1}{2}$, Зад. 7: $A=\dfrac{3}{2}$, Зад. 8: S_{ABCD} = 156 cm^2.

Вариант I

I част

Отговори

1	2	3	4	5
В	В	Б	В	Г

II част

6. Ако $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{2}{5}$, да се намери стойността на израза $A = \dfrac{9}{1+\sin 2\alpha}$.

Решение: За $\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{2.\left(-\dfrac{2}{5}\right)}{1+\dfrac{4}{25}} = -\dfrac{20}{29}$ и $A = \dfrac{9}{1+\sin 2\alpha} = \dfrac{9}{1-\dfrac{20}{29}} = 29$.

7. Каква е вероятността при 5 хвърляния на зар да се падне три пъти число, което се дели на 3?

Решение: Вероятността да се падне число, което се дели на 3 е равна на $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$. Търсената вероятност е равна на $C_5^3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{40}{243}$.

III част

8. В ΔABC са дадени $\alpha = \dfrac{5\pi}{8}$ и $\beta = \dfrac{\pi}{8}$. Да се докаже, че cotgα + cotgβ + cotgγ = 3.

Решение: $\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma = \operatorname{cotg}\dfrac{5\pi}{8} + \operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{8} + \operatorname{cotg}\dfrac{2\pi}{8} = \operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right) + \operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{8} + 1 =$

$$= -\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \operatorname{cotg}\frac{\pi}{8} + 1 = \frac{\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}} + 1 = \frac{2\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} + 1 = 3.$$

Вариант II

I част

Отговори

1	2	3	4	5
А	Г	Б	Б	Б

II част

6. Ако $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$, да се намери стойността на израза $B = \dfrac{8}{1+\cos 2\alpha}$.

Решение: Тъй като $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}{1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{7}{25}$, то $B = \dfrac{8}{1+\cos 2\alpha} = \dfrac{8}{1+\dfrac{7}{25}} = \dfrac{25}{4}$.

7. Каква е вероятността при 5 хвърляния на зар да се падне два пъти число, което не се дели на 3?

Решение: Вероятността да се падне число, което не се дели на 3 е равна на $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$. Търсената вероятност е равна на $C_5^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{40}{243}$.

III част

8. В ΔABC са дадени $\alpha = \dfrac{5\pi}{8}$ и $\beta = \dfrac{\pi}{8}$. Да се докаже, че $\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\gamma = 1$.

Решение: $\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\gamma = \operatorname{cotg}\dfrac{5\pi}{8} + \operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{8} + \operatorname{cotg}\dfrac{2\pi}{8} = \operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right) + \operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{8} - 1 =$

$$= -\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \operatorname{cotg}\frac{\pi}{8} - 1 = \frac{\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}} - 1 = \frac{2\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} - 1 = 1.$$

ГОДИШНО ТЕМАТИЧНО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ
ПО УЧЕБНИЯ ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА ЗА 11. КЛАС

ПЪРВИ УЧЕБЕН СРОК – 18 СЕДМИЦИ Х **2** ЧАСА СЕДМИЧНО = **36** ЧАСА

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Очаквани резултати от обучението	Методи на работа
1.	1	Квадратни корени. Действия с корени	Начален преговор	Разбира дефиницията за квадратен корен. Знае и прилага правилата за действия с корени. Може да рационализира знаменател на дроб.	Лекция, домашна работа, работа в клас, актуализиране на знания.
2.	1	Степен с цял показател	Начален преговор	Разбира дефинициите за степен с отрицателен показател. Знае и прилага правилата за действия със степени.	Лекция, домашна работа, работа в клас, актуализиране на знания.
3.	2	Преобразуване на изрази, съдържащи квадратни корени и степени	Начален преговор	Умее да преобразува изрази, съдържащи квадратни корени и степени. Умее да намира числена стойност на израз за дадени стойности на променливите. Умее да доказва тъждества.	Лекция, домашна работа, работа в клас, актуализиране на знания.
4.	2	Входно равнище. Тема за самоконтрол	Контрол	Проверка на степента на усвояване на новите знания.	Контролна работа
5.	3	Корен трети. Свойства	Нови знания	Знае как се намира корен трети и умее да прилага основните му свойства.	Актуализиране на знания, аналогия, работа в час.
6.	3	Корен *n*-ти. Свойства	Нови знания	Знае понятието корен n-ти, свойствата и релациите, свързани с него.	Беседа, анализ, аналогия, работа в час, домашна работа.
7.	4	Преобразуване на ирационални изрази	Нови знания	Знае как се преобразуват изрази, съдържащи корени.	Актуализиране на знания, работа в час, домашна работа.
8.	4	Графики на функциите $y=\sqrt{x}$, $y=x^3$ и $y=\sqrt[3]{x}$.	Нови знания	Знае свойствата и разпознава графиките на функциите $y=\sqrt{x}$, $y=x^3$ и $y=\sqrt[3]{x}$.	Беседа, анализ, аналогия, работа в час.
9.	5	Степен с рационален степенен показател	Нови знания	Знае понятието степен с рационален степенен показател и неговите свойства и умее да ги прилага.	Беседа,анализ, работа в час.
10.	5	Степен с рационален степенен показател. Упражнение	Упражнение	Умее да извършва действия със степени с рационален степенен показател.	Актуализиране на знания, работа в час, домашна работа.
11.	6	Преобразуване на изрази, съдържащи степен с рационален степенен показател	Нови знания	Знае да преобразува изрази с рационален степенен показател.	Актуализиране на знания, анализ, работа в час, домашна работа.
12.	6	Сравняване на степени с равни основи. Степен с реален показател	Нови знания	Умее да сравнява степени и има представа за степен с реален степенен показател.	Актуализиране на знания, беседа, анализ, работа в час.

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Очаквани резултати от обучението	Методи на работа
13	7	Показателна функция. Свойства и графика	Нови знания	Знае основните свойства на показателната функция.	Беседа, анализ, аналогия, работа в час.
14.	7	Показателна функция. Свойства и графика. Упражнение	Упражнение	Умее да прилага свойствата на показателната функция.	Актуализиране на знания, работа в час, домашна работа.
15.	8	Логаритъм. Основни свойства. Сравняване на логаритми. Графика на логаритмична функция	Нови знания	Знае понятието логаритъм и множеството от допустимите стойности (дефиниционното множество) на логаритмична функция.	Работа в час. Домашна работа.
16.	8	Логаритъм. Основни свойства. Сравняване на логаритми. Графика на логаритмична функция. Упражнение	Упражнение	Знае кои са основните свойства и сравнява логаритми. Чете графика на логаритмична функция.	Работа в час. Домашна работа.
17.	9	Логаритмуване на произведение, частно, степен и корен	Нови знания	Знае основните свойства на логаритмите.	Работа в час. Домашна работа.
18.	9	Логаритмуване на произведение, частно, степен и корен. Упражнение	Упражнение	Знае основните свойства на логаритмите.	Работа в час. Домашна работа.
19.	10	Степен и логаритъм. Тема за самоконтрол	Контрол	Знае понятиятакорен n-ти, графики на функциите $y=\sqrt{x}$, $y=x^3$ и $y=\sqrt[3]{x}$, показателна функция – свойства и графика, логаритъм, основните му свойства, сравняване на логаритми и графика на логаритмична функция.	Контролна работа
20.	10	Решаване на триъгълник (преговор)	Преговор	Знае основните задачи и теореми за решаване на триъгълник.	Актуализиране на стари знания. Работа в час.
21.	11	Успоредник и трапец (преговор)	Преговор	Знае и умее да прилага свойствата и признаците за успоредник и трапец.	Актуализиране на стари знания. Работа в час.
22.	11	Лице на четириъгълник	Нови знания	Знае и умее да прилага формулата за лице на четириъгълник.	Анализ, дискусия, работа в час, домашна работа.
23.	12	Решаване на успоредник	Нови знания	Знае формула за лице на успоредник и зависимостта между страните и диагоналите му.	Анализ, дискусия, работа в час, домашна работа.
24.	12	Решаване на успоредник. Упражнение	Упражнение	Умее да прилага зависимостите между основни елементи в успоредник.	Актуализиране на знания, дискусия, работа в час, домашна работа.
25.	13	Решаване на трапец (преговор)	Преговор	Знае как се решават равнобедрен и правоъгълен трапец.	Актуализиране на стари знания.Работа в час.
26.	13	Решаване на трапец	Нови знания	Знае кои са важните допълнителни построения при трапец.	Дискусия, работа в час, домашна работа.

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Очаквани резултати от обучението	Методи на работа
27.	14	Решаване на трапец. Упражнение	Упражнение	Умее да прилага допълнителни построения при решаване на трапец.	Анализ, работа в час, домашна работа.
28.	14	Решаване на четириъгълник	Нови знания	Знае и прилага свойствата на вписаните и на описаните четириъгълници.	Анализ, дискусия, работа в час, домашна работа.
29.	15	Решаване на четириъгълник. Упражнение	Упражнение	Умее да решава различни ситуации, свързани с произволен четириъгълник.	Актуализиране на знания, работа в час, домашна работа.
30.	15	Решаване на правилен многоъгълник	Нови знания	Знае и умее да прилага зависимостите между елементите на правилен многоъгълник.	Актуализиране на стари знания, дискусия, работа в час, домашна работа.
31.	16	Решаване на равнинни фигури. Тема за самоконтрол	Контрол	Знае и умее да прилага наученото от разглежданата тема.	Самостоятелна работа за проверка на знанията и уменията върху разглежданата тема.
32.	16	Класна работа	Контрол	Диагностика на знанията за основните елементи от разглежданите до момента алгебрични и геометрични теми.	Самостоятелна работа за проверка на знанията и уменията върху материала от I учебен срок.
33.	17	Тригонометрични функции на ъгли от 0° до 180° (преговор)	Преговор	Знае основните тригонометрични тъждествав интервала [0°; 180°].	Работа в час. Домашна работа.
34.	17	Обобщен ъгъл. Радиан. Тригонометрични функции на обобщен ъгъл	Нови знания	Знае понятията обобщен ъгъл и радиан и тригонометрични функции на обобщен ъгъл	Работа в час. Домашна работа.
35.	18	Обобщен ъгъл. Радиан. Тригонометрични функции на обобщен ъгъл. Упражнение	Упражнение	Знае понятията обобщен ъгъл и радиан и тригонометрични функции на обобщен ъгъл	Работа в час. Домашна работа.
36.	18	Основни тригонометрични тъждества	Нови знания	Знае основните тригонометрични тъждества.	Работа в час. Домашна работа
37.	19	Основни тригонометрични тъждества. Упражнение	Упражнение	Знае основните тригонометрични тъждества.	Работа в час. Домашна работа
38.	19	Четност, нечетност и периодичност на тригонометричните функции	Нови знания	Знае свойствата четност, нечетност и периодичност на тригонометричните функции.	Работа в час. Домашна работа
39.	20	Четност, нечетност и периодичност на тригонометричните функции. Упражнение	Упражнение	Знае свойствата четност, нечетност и периодичност на тригонометричните функции.	Работа в час. Домашна работа.

ВТОРИ УЧЕБЕН СРОК – 18 СЕДМИЦИ Х **2** ЧАСА СЕДМИЧНО = **36** ЧАСА

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Очаквани резултати от обучението	Методи на работа
41.	21	Графики на функциите $y = \sin x$, $y = \cos x$.	Нови знания	Знае графиките на функциите $y = \sin x$, $y = \cos x$.	Работа в час. Домашна работа.
42.	21	Графики на функциите $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{cotg} x$.	Нови знания	Знае графиките на функциите $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{cotg} x$.	Работа в час. Домашна работа.
43.	22	Формули за синус и косинус от сбор и разлика на два ъгъла	Нови знания	Знае формули за синус и косинус от сбор и разлика на два ъгъла	Работа в час. Домашна работа.
44.	22	Формули за синус и косинус от сбор и разлика на два ъгъла. Упражнение	Упражнение	Знае формули за синус и косинус от сбор и разлика на два ъгъла	Работа в час. Домашна работа.
45.	23	Формули за тангенс и котангенс от сбор и разлика на два ъгъла	Нови знания	Знае формули за тангенс и котангенс от сбор и разлика на два ъгъла	Работа в час. Домашна работа.
46.	23	Формули за тригонометрични функции от удвоен ъгъл	Нови знания	Знае формули за тригонометрични функции от удвоен ъгъл	Работа в час. Домашна работа.
47.	24	Формули за тригонометрични функции от удвоен ъгъл. Упражнение	Упражнение	Знае формули за тригонометрични функции от удвоен ъгъл	Работа в час. Домашна работа.
48.	24	Формули за сбор и произведение на тригонометрични функции.	Нови знания	Знае формули за сбор и произведение на тригонометрични функции.	Работа в час. Домашна работа.
49.	25	Формули за сбор и произведение на тригонометрични функции. Упражнение	Упражнение	Знае формули за сбор и произведение на тригонометрични функции.	Работа в час. Домашна работа.
50.	25	Тригонометрия. Тема за самоконтрол	Контрол	Знае графиките на функциите $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{cotg} x$, формули за синус и косинус от сбор и разлика на два ъгъла, тангенс и котангенс от сбор и разлика на два ъгъла, тригонометрични функции от удвоен ъгъл, сбор и произведение на тригонометрични функции.	Диагностика доколко умее да чете и чертаеграфиките на функциите $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{cotg} x$, да прилага знанията си за формули за синус и косинус от сбор и разлика на два ъгъла, тангенс и котангенс от сбор и разлика на два ъгъла, тригонометрични функции от удвоен ъгъл, сбор и произведение на тригонометрични функции.

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Очаквани резултати от обучението	Методи на работа
51.	26	Вероятност. Класическа вероятност	Преговор	Знае дефиницията за класическа вероятност. Умее да намира вероятности в конкретни задачи.	Лекция, домашна работа, работа в клас.
52.	26	Условна вероятност. Теорема за умножение на вероятностите. Независимост	Нови знания	Знае кои събития са зависи и кои – независими. При зависими събития прилага формулата за условна вероятност	Лекция, домашна работа, работа в клас, беседа, анализ.
53.	27	Условна вероятност. Теорема за умножение на вероятностите. Независимост. Упражнение	Упражнение	Умее да решава задачи, свързани с условна вероятност.	Лекция, домашна работа, работа в клас, беседа, актуализиране на знания.
54.	27	Модели на многократни експерименти с два възможни изхода	Нови знания	Прилага формулата $C_n^k.p^k(1-p)^{n-k}$ за намиране на вероятността за сбъдване на k пъти на даденото събитие.	Лекция, домашна работа, работа в клас, беседа.
55.	28	Модели на многократни експерименти с два възможни изхода. Упражнение	Упражнение	Идентифицира задачи, свързани с многократни експерименти с два възможни изхода.	Лекция, домашна работа, работа в клас, актуализиране на знания.
56.	28	Разпределения на вероятностите със сума 1	Нови знания	Умее да намира вероятности при зададено разпределение на вероятностите с едно неизвестно.	Лекция, домашна работа, работа в клас, анализ.
57.	29	Разпределения на вероятностите със сума 1. Упражнение	Упражнение	Умее да съставя функция на разпределението в контекста на конкретни задачи.	Лекция, домашна работа, работа в клас, актуализиране на знания.
58.	29	Геометрична вероятност върху правата като отношение на дължини на интервали	Нови знания	Умее да намира геометрична вероятност като отношение на дължини на отсечки.	Лекция, домашна работа, работа в клас, беседа, анализ.
59.	30	Геометрична вероятност върху правата като отношение на дължини на интервали. Упражнение	Упражнение	Умее да моделира задачи, които се свеждат до намиране на геометрична вероятност върху права.	Лекция, домашна работа, работа в клас, актуализиране на знания.
60.	30	Геометрична вероятност в равнината като отношение на лица	Нови знания	Умее да намира геометрична вероятност като отношение на лица на фигури.	Лекция, домашна работа, работа в клас, беседа.
61.	31	Геометрична вероятност в равнината като отношение на лица. Упражнение	Упражнение	Умее да моделира задачи, които се свеждат до намиране на геометрична вероятност в равнината.	Лекция, домашна работа, работа в клас, актуализиране на знания.
62.	31	Вероятности. Тема за самоконтрол	Контрол	Проверка на степента на усвояване на новите знания.	Контролна работа.

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Очаквани резултати от обучението	Методи на работа
63.	32	Класна работа	Контрол		
64.	32	Степен и логаритъм	Годишен преговор	Систематизира знанията върху преговаряната тема.	Беседа, дискусия, работа в час.
65.	33	Решаване на равнинни фигури	Годишен преговор	Систематизира знанията върху преговаряната тема.	Беседа, дискусия, работа в час.
66.	33	Тригонометрия	Годишен преговор	Систематизира знанията върху преговаряната тема.	Беседа, дискусия, работа в час.
67.	34	Изходно равнище. Тема за самоконтрол	Контрол		

Приложение № 15 към т. 15

УЧЕБНА ПРОГРАМА ПО МАТЕМАТИКА ЗА ЕДИНАДЕСЕТИ КЛАС (ОБЩООБРАЗОВАТЕЛНА ПОДГОТОВКА)

КРАТКО ПРЕДСТАВЯНЕ НА УЧЕБНАТА ПРОГРАМА

Обучението по **математика** в XI клас е насочено към овладяване на базисни знания, умения и отношения, свързани с постигане на изискванията за резултатите от обучението по учебен предмет математика и с изграждане на ключови компетентности на ученика.

Обучението по математика на ниво общообразователна подготовка е основа за обучението по математика на ниво профилирана подготовка.

ОЧАКВАНИ РЕЗУЛТАТИ В КРАЯ НА КЛАСА

Области на компетентности	Знания, умения и отношения *В резултат на обучението си ученикът:*
Числа. Алгебра	• знае понятието корен n-ти и неговите свойства; • знае понятията степен и логаритъм и техните основни свойства; • извършва тъждествени преобразувания на ирационални изрази, съдържащи квадратни и кубични корени, и корен 4-ти; • извършва тъждествени преобразувания на тригонометрични изрази; • умее да намира стойност на тригонометричен израз.
Фигури и тела	• умее да решава успоредник, трапец, четириъгълник и правилен многоъгълник; • прилага знания от тригонометрията в планиметрията.
Функции. Измерване	• знае тригонометрични функции на обобщен ъгъл, техните графики и свойства; • умее да намира лице на четириъгълник и правилен многоъгълник; • знае графиките и свойствата на функциите $y=\sqrt{x}$, $y=x^3$ и $y=\sqrt[3]{x}$, $y=a^x$, $y=\log_a x$
Логически знания	• прилага адекватно кванторите "за всяко" и "съществува" и понятията "необходимо условие", "достатъчно условие" и "необходимо и достатъчно условие" в зависимост от ситуацията; • умее да образува отрицание на твърдение; • умее да обосновава изводи; • преценява вярност, рационалност и целесъобразност при избор на подход към решаването на проблем.
Елементи от вероятности и статистика	• разчита и интерпретира информация, представена с графики, с таблици или с диаграми; • знае понятието условна вероятност и умее да го прилага за намиране вероятност на сечение на две събития; • знае да разпознава и прилага модели на многократни опити с два възможни изхода в конкретни практически ситуации; • знае понятието геометрична вероятност и умее да я намира в конкретни ситуации върху правата и в равнината.
Моделиране	• умее да моделира геометрична ситуация с помощта на алгебричен или тригонометричен израз; • моделира практически ситуации с алгебрични изрази; • умее да прилага вероятност на съставно (сложно) събитие при решаване на конкретни проблеми.

УЧЕБНО СЪДЪРЖАНИЕ

Теми	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия/ Знания
1. Степен и логаритъм 1.1. Корен трети. Свойства. 1.2. Корен n-ти. Свойства. 1.3. Преобразуване на ирационални изрази. 1.4. Графики на функциите $y=\sqrt{x}$, $y=x^3$ и $y=\sqrt[3]{x}$ 1.5. Степен с рационален степенен показател. Свойства. 1.6. Преобразуване на изрази, съдържащи степен с рационален степенен показател. 1.7. Показателна функция. Графика. 1.8. Логаритъм. Основни свойства. Сравняване на логаритми. Графика на логаритмична функция. 1.9. Логаритмуване на произведение, частно, степен и корен.	• знае понятието корен n-ти и неговите свойства; • умее да преобразува ирационални изрази, • съдържащи квадратни и кубични корени, и корен 4-ти; • знае понятието степен с рационален показател и неговите свойства; • умее да преобразува изрази, съдържащи степени с рационален показател; • знае понятието логаритъм и неговите свойства; • умее да прилага свойствата на логаритмите за преобразуване на изрази; • умее да намира елементите на логаритъм – стойност, основа или аргумент при наличие на останалите две величини; • умее да разпознава графиките на степенната, показателната и логаритмичната функция; • разчита и интерпретира информация, представена с графики; • умее да решава с калкулатор практически задачи.	Корен трети (кубичен корен), корен n-ти, логаритъм, основа, логаритмуване, антилогаритмуване.
2. Решаване на равнинни фигури 2.1. Решаване на успоредник. 2.2. Решаване на трапец. 2.3. Решаване на четириъгълник. 2.4. Решаване на правилен многоъгълник.	• умее да решава: – успоредник; – трапец; – четириъгълник; – правилен многоъгълник; • умее да преценява вярност, рационалност и целесъобразност при избор на подход към решаването на проблем; • умее да моделира геометрична ситуация с помощта на алгебричен или тригонометричен израз.	
3. Тригонометрия 3.1. Обобщен ъгъл. Радиан. Тригонометрични функции на обобщен ъгъл. 3.2. Основни тригонометрични тъждества. 3.3. Четност, нечетност и периодичност на тригонометричните функции. 3.4. Графики на функциите $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{cotg} x$. 3.5. Формули за синус и косинус от сбор и разлика на два ъгъла. 3.6. Формули за тангенс и котангенс от сбор и разлика на два ъгъла. 3.7. Формули за тригонометрични функции от удвоен ъгъл. 3.8. Формули за сбор и произведение на тригонометрични функции.	• знае понятията обобщен ъгъл и радиан; • умее да превръща градусна мярка на ъгли в радианна и обратно; • знае определенията на основните тригонометрични функции на обобщен ъгъл; • знае и умее да прилага основните свойства на тригонометричните функции; • умее да намира: – стойностите на тригонометричните функции на някои специални ъгли; – стойност на тригонометрична функция на ъгъл по дадена стойност на една негова тригонометрична функция; • разпознава графиките на основните тригонометрични функции; • умее да преобразува тригонометрични изрази с помощта на изучените формули.	Обобщен ъгъл, радиан, радианна мярка на ъгъл, четна функция, нечетна функция, период, периодична функция.

Теми	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия/ Знания
4. Вероятности 4.1. Условна вероятност. Теорема за умножение на вероятностите. Независимост. 4.2. Модели на многократни експерименти с два възможни изхода. 4.3. Разпределения на вероятностите със сума 1. 4.4. Геометрична вероятност върху правата като отношение на дължини на интервали. 4.5. Геометрична вероятност в равнината като отношение на лица.	• знае понятието условна вероятност и умее да го прилага за намиране вероятност на сечение на две събития; • знае да разпознава и прилага модели на многократни опити с два възможни изхода в конкретни практически ситуации; • разбира и знае да пресмята разпределение на вероятностите със сума 1; • знае понятието геометрична вероятност върху правата и умее да я намира като отношение на дължини; • знае понятието геометрична вероятност в равнината и умее да я намира като отношение на лица.	Независими събития, многократни случайни експерименти, геометрична вероятност

Годишен брой часове в десети клас – 36 учебни седмици по 2 учебни часа седмично = 72 часа

- При реализация на програмата спазването на хронологията в разпределението на съдържанието е задължително.
- Разпределението на съдържанието, включено в посочените в програмата подтеми (заглавия с двойна номерация), се прави по преценка на този, който я реализира (автори на учебници и учебни помагала, преподаватели).

ПРЕПОРЪЧИТЕЛНО ПРОЦЕНТНО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ НА ЗАДЪЛЖИТЕЛНИТЕ УЧЕБНИ ЧАСОВЕ ЗА ГОДИНАТА:

За нови знания	до 43 часа	до 60%
За упражнения		над 30%
За преговор		
За обобщение		
Практически дейности		
За контрол и оценка (за входно и изходно ниво, за класни и за контролни работи и проекти)	до 7 часа	до 10%

СПЕЦИФИЧНИ МЕТОДИ И ФОРМИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ ПОСТИЖЕНИЯТА НА УЧЕНИЦИТЕ

Форми на оценяване:

Устно изпитване – оценяват се мнението и аргументите на ученика при решаването на конкретна математическа задача.

Писмено изпитване – оценява се постигането на стандартите чрез кратки писмени индивидуални или групови изпитвания.

Контролни и класни работи – оценява се постигането на стандартите за по-големи обособени фрагменти от учебното съдържание (в края на раздел, в края на учебния срок).

Практическа работа –изпълнение на домашна работа, разработка на проект и др.

СЪОТНОШЕНИЕ ПРИ ФОРМИРАНЕ НА СРОЧНА И ГОДИШНА ОЦЕНКА:

Оценки от устни изпитвания	15%
Оценки от писмени изпитвания	10%
Оценки от контролни и от класни работи	50%
Оценки от други участия (работа в час, изпълнение на домашни работи, работа по проекти и др.)	25%

ДЕЙНОСТИ ЗА ПРИДОБИВАНЕ НА КЛЮЧОВИТЕ КОМПЕТЕНТНОСТИ, КАКТО И МЕЖДУПРЕДМЕТНИ ВРЪЗКИ

Практически дейности, които могат да се реализират в класната стая:

- Да използват софтуерни продукти за демонстрация на графиките на тригонометричните функции, степенната, показателната и логаритмичната функции за изследване на свойствата им, което спомага за придобиване на математическа компетентност и ключови компетентности: умения за общуване на чужди езици, основни компетентности в областта на природните науки и технологиите дигитална компетентност, социални и граждански компетентности, инициативност и предприемчивост.
- Да разчитат и интерпретират данни, зададени с таблици, диаграми и графики, което подпомага формирането на математическа компетентност, основни компетентности в областта на природните науки, инициативност и предприемчивост.

Установяване на междупредметни връзки

- С информационните технологии – там, където е необходимо по-добро онагледяване на учебния процес или формиране на определени практически умения може да се търсят възможности за провеждане на съвместни уроци, например при използване на конкретен динамичен софтуер.
- С физика и астрономия, химия и опазване на околната среда, биология и здравно образование при моделиране на процеси с показателна, логаритмична и тригонометрични функции.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ В УЧЕБНИКА ПО МАТЕМАТИКА ЗА 11. КЛАС

1. КВАДРАТНИ КОРЕНИ. ДЕЙСТВИЯ С КОРЕНИ

1. а) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}\sqrt{32}=\sqrt{25}+\sqrt{64}=5+8=13.$

б) $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}=\sqrt{9}-\sqrt{9}=0.$

в) $\dfrac{\left(3+\sqrt{5}\right)^2}{\sqrt{2}^2}-3\sqrt{5}=\dfrac{9+6\sqrt{5}+5}{2}-3\sqrt{5}=\dfrac{14+6\sqrt{5}}{2}-3\sqrt{5}=7+3\sqrt{5}-3\sqrt{5}=7.$

г) $2\sqrt{13}+\left(\sqrt{13}-1\right)^2=2\sqrt{13}+13-2\sqrt{13}+1=14.$

2. а) $6\sqrt{5}=\sqrt{36.5}=\sqrt{180}>5\sqrt{7}=\sqrt{25.7}=\sqrt{175}$

б) $8\sqrt{2}=\sqrt{64.2}=\sqrt{128}>3\sqrt{14}=\sqrt{9.14}=\sqrt{126}$

в) $2\sqrt{3}+\sqrt{27}=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}=\sqrt{75}>8\sqrt{2}-\sqrt{8}=8\sqrt{2}-2\sqrt{2}=6\sqrt{2}=\sqrt{72}$

4. а) $\dfrac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}-\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{11-7}-\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{7-3}=\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{4}.$

б) $\dfrac{2}{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}-\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}=\dfrac{2\left(2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)}{6}-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

в) $\sqrt{45}-\sqrt{20}-\dfrac{25}{3\sqrt{5}+2\sqrt{5}}=3\sqrt{5}-2\sqrt{5}-\dfrac{25}{5\sqrt{5}}=\sqrt{5}-\sqrt{5}=0.$

г) $\left(7-\sqrt{11}\right)^2+\left(7+\sqrt{11}\right)^2=49-14\sqrt{11}+11+49+14\sqrt{11}+11=120.$

2. СТЕПЕН С ЦЯЛ ПОКАЗАТЕЛ

3. а) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^{-2}.4+2\sqrt{15}=\dfrac{4}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2}+2\sqrt{15}=\dfrac{4}{8+2\sqrt{15}}+2\sqrt{15}=\dfrac{2}{4+\sqrt{15}}+2\sqrt{15}=2\left(4-\sqrt{15}\right)+2\sqrt{15}=8.$

б) $\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)^{-3}=\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{3}=\left(-\left(1-\sqrt{2}\right)^2\right)^3=\left(2\sqrt{2}-3\right)^3=16\sqrt{2}-72+54\sqrt{2}-27=70\sqrt{2}-99.$

4. При дадените стойности пресмятаме $\sqrt{xy}=\sqrt{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{-2}\left(3-2\sqrt{2}\right)^{-2}}=1$

$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{-2}}-\sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)^{-2}}=\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}-\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}=-4\sqrt{2}$

$\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^{-1}}{\sqrt{xy}}=\dfrac{\left(-4\sqrt{2}\right)^{-1}}{1}=-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

3. ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА ИЗРАЗИ, СЪДЪРЖАЩИ КВАДРАТНИ КОРЕНИ И СТЕПЕНИ

1. а) $\sqrt{\left(\sqrt{81}\right)^{-2}}=\dfrac{1}{\sqrt{81}}=\dfrac{1}{9}$

б) $3\sqrt{18}-\dfrac{1}{\left(\sqrt{98}\right)^{-1}}=9\sqrt{2}-7\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

в) $\left(\left(\sqrt{28}\right)^{-1}+\left(\sqrt{7}\right)^{-1}\right)^{-1}=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-1}=\left(\dfrac{3}{2\sqrt{7}}\right)^{-1}=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$

2. При дадените стойности имаме $xy=\left(\sqrt{5}-2\right)^{-1}\left(\sqrt{5}+2\right)^{-1}=1$ и

$x+y=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}=\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2=2\sqrt{5}$. Тогава $xy\left(x+y\right)^{-3}=\left(2\sqrt{5}\right)^{-3}=\dfrac{1}{40\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{200}$.

4. а) $\left(\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^{-1}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)^{-1}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-2}=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-2}=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-1}=\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

б) $\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^{-3}-\left(\sqrt{y}\right)^{-3}}{\left(\sqrt{xy}\right)^{-2}}=\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}-\dfrac{1}{y\sqrt{y}}\right).xy=\dfrac{y}{\sqrt{x}}-\dfrac{x}{\sqrt{y}}$

4. ВХОДНО РАВНИЩЕ. ТЕМА ЗА САМОКОНТРОЛ

1. $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^{-2}=\left(2\sqrt{3}\right)^{2}=12$, отговор Г).

2. $\sqrt{\left(\dfrac{7}{11}\right)^{-1}}:\left(\dfrac{\sqrt{33}}{\sqrt{21}}\right)=\sqrt{\dfrac{11.21}{7.33}}=1$, отговор Б).

3. $\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^{-5}.\sqrt{2}.\left(\sqrt{7}\right)^{3}}{2^{-3}\left(\sqrt{7}\right)^{-1}}=\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^{-4}.\left(\sqrt{7}\right)^{4}}{2^{-3}}=\dfrac{2^{-2}.7^{2}}{2^{-3}}=98$, отговор А).

4. Решението е $x=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}=\dfrac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)^{2}}{3}=3-2\sqrt{2}$, отговор А).

5. Имаме $ab\left(a+b\right)^{-1}=\dfrac{\sqrt{5}.\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{5}.\sqrt{10}}{\sqrt{5}\left(1+\sqrt{2}\right)}=\sqrt{10}\left(\sqrt{2}-1\right)=2\sqrt{5}-\sqrt{10}$, отговор В).

6. Равенството е тъждество, тъй като

$$\dfrac{\sqrt{a}+\left(\sqrt{a}\right)^{-1}}{a+1}=\dfrac{\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}}{a+1}=\dfrac{\dfrac{a+1}{\sqrt{a}}}{a+1}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\left(\dfrac{a}{\sqrt{a}}\right)^{-1}=\left(\sqrt{a}\right)^{-1}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$$

7. При дадените стойности намираме

$$(xy)^{-3}=\left(\sqrt{10}-3\right)^3\left(\sqrt{10}+3\right)^3=1 \text{ и } x+y=\frac{1}{\sqrt{10}-3}+\frac{1}{\sqrt{10}+3}=\sqrt{10}+3+\sqrt{10}-3=2\sqrt{10}$$

и стойността на израза $(xy)^{-3}(x+y)$ е $2\sqrt{10}$.

8. Имаме $a=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\dfrac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2}{4}=\dfrac{10+2\sqrt{21}}{4}=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}<\dfrac{5+5}{2}=5$,

$b=\left(2+\sqrt{6}\right)^2=10+4\sqrt{6}=10+\sqrt{96}<10+10=20=c$ и следователно $a<b<c$.

5. КОРЕН 3-ТИ. СВОЙСТВА

1. По определение $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right)^3=\dfrac{a}{b}$. При $b\neq 0$ последното равенство е вярно, тъй като

$$\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right)^3=\frac{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{b}\right)^3}=\frac{a}{b}.$$

От $\left[\left(\sqrt[3]{\grave{a}}\right)^k\right]^3=\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^3\right]^k=\ {}^k$ и $\sqrt[3]{\grave{a}^k}=\left(\sqrt[3]{a}\right)^k \Leftrightarrow \left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^k\right]^3=\ {}^k$ следва верността на правило (3).

2. $\sqrt{(-2)^2}=\sqrt[3]{(-2)^3} \Leftrightarrow |-2|=-2 \Leftrightarrow 2=-2$ (невярно); $\sqrt{3^2}=\sqrt[3]{3^3} \Leftrightarrow 3=3$ (вярно).

3. От $\sqrt{x^2}=\sqrt[3]{x^3} \Leftrightarrow |x|=x$ и определението за модул следва, че $|x|=x$ при $x\geq 0$ (отг. В).

4. а) $\sqrt[3]{-64}+\sqrt[3]{5.25}+\sqrt[3]{-0,027}.\left(\sqrt[3]{10}\right)^3=\sqrt[3]{(-4)^3}+\sqrt[3]{5^3}+\sqrt[3]{(-0,3)^3}.10=-4+5-0,3.10=1-3=-2$.

5. а) $\sqrt[3]{\dfrac{3^7.63.7^2}{5^6}}=\sqrt[3]{\dfrac{3^7.3^2.7.7^2}{5^6}}=\sqrt[3]{\dfrac{3^7.3^2.7^3}{5^6}}=\dfrac{3^3.7}{5^2}$.

б) $\sqrt[3]{120.45.60}=\sqrt[3]{3.4.2.5.9.5.5.3.4}=\sqrt[3]{3.3^3.4.2^3.5^3}=2.3.5\sqrt[3]{12}=30\sqrt[3]{12}$.

в) $\sqrt[3]{x^7y^{15}z^4t^5}=\sqrt[3]{x.x^6y^{15}z.z^3t^2t^3}=x^2y^5zt\sqrt[3]{xzt^2}$.

6. а) Пресмятаме $a=\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}\right)-\dfrac{\sqrt[3]{162}}{\sqrt[3]{2}}=\left(\sqrt[3]{9}\right)^2-\left(\sqrt[3]{4}\right)^2-\sqrt[3]{\dfrac{162}{2}}=$

$=\cancel{\sqrt[3]{81}}-\sqrt[3]{16}-\cancel{\sqrt[3]{81}}=-\sqrt[3]{2^4}=-2\sqrt[3]{2}$. Следователно $a=b$.

б) От $\grave{a}=3\sqrt[3]{8-\sqrt{29}}.\sqrt[3]{8+\sqrt{29}}-\sqrt[3]{2^3+3^3}=3\sqrt[3]{8^2-29}-\sqrt[3]{8+27}=3\sqrt[3]{35}-\sqrt[3]{35}=2\sqrt[3]{35}==\sqrt[3]{8.35}=\sqrt[3]{280}$,

$b=3\sqrt[3]{10}=\sqrt[3]{27.10}=\sqrt[3]{270}$ и $280>270$ следва, че $\sqrt[3]{280}>\sqrt[3]{270}$ и $a>b$.

6. КОРЕН N-ТИ. СВОЙСТВА

1. По определение $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n=ab$, катопоследноторавенство е варно, тъй като $\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=ab$.

Аналогично, $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\dfrac{a}{b}$ и $\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\dfrac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n}=\dfrac{a}{b}$.

2. а) $\sqrt[4]{64}+\sqrt[5]{32}+\sqrt[6]{0,000001}.\left(\sqrt[10]{10}\right)^{10}=\sqrt[4]{4^4}+\sqrt[5]{2^5}+\sqrt[6]{(0,1)^6}.10=4+2+0,1.10=7$.

б) $\sqrt[4]{2\sqrt{64}}-\sqrt[5]{1-\sqrt[3]{8}}-\sqrt[3]{\sqrt{900}-3}=\sqrt[4]{2.8}-\sqrt[5]{1-2}-\sqrt[3]{30-3}=\sqrt[4]{16}-\sqrt[5]{-1}-\sqrt[3]{27}=2+1-3=0$.

3. а) $\sqrt[4]{\dfrac{3^7.63.7^3}{5^4}}=\sqrt[4]{\dfrac{3^4.3^3.9.7.7^3}{5^4}}=\sqrt[4]{\dfrac{3^8.3.7^4}{5^4}}=\dfrac{3^2.7}{5}\sqrt[4]{3}=\dfrac{63}{5}\sqrt[4]{3}$.

б) $\sqrt[5]{288.135.25}=\sqrt[5]{2.3^2.4^2.5.27.25}=\sqrt[5]{2^5.3^5.5^3}=2.3\sqrt[5]{5^3}=6\sqrt[5]{125}$.

в) Дефиниционното множество на израза е $x\geq 0$.

Тогава $\sqrt[6]{x^7y^{18}z^8t^{12}}=\sqrt[6]{x.x^6y^{18}z^2z^6t^{12}}=x\left|y^3\right|\left|z\right|t^2\sqrt[6]{xz^2}=x\left|y^3z\right|t^2\sqrt[6]{xz^2}$.

4. а) $\sqrt[6]{2^4}=\sqrt[3.\cancel{2}]{2^{\cancel{2}.2}}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[9]{3^{12}}=\sqrt[3]{5^4}=\sqrt[3]{625}$; $\sqrt[8]{(-2)^4}=\sqrt{2}$;

б) $\sqrt[12]{a^6}=\sqrt[\cancel{6}.2]{a^{\cancel{6}}}=\sqrt{|a|}$; $\sqrt[6]{a^{15}}=\sqrt[\cancel{3}.2]{a^{\cancel{3}.5}}=\sqrt{a^5}$ $(DM: a\geq 0)$; $\sqrt[9]{a^{15}}=\sqrt[\cancel{3}.3]{a^{\cancel{3}.5}}=\sqrt[3]{a^5}$.

в) $\sqrt[3]{\sqrt{3^3}}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{\sqrt[6]{2^3}}=\sqrt[18]{2^3}=\sqrt[6]{2}$ или $\sqrt[3]{\sqrt[6]{2^3}}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}=\sqrt[6]{2}$;

$\sqrt[3]{3\sqrt[5]{(-3)^7}}=\sqrt[3]{\sqrt[5]{3^5(-3)^7}}=\sqrt[3]{\sqrt[5]{-3^{12}}}=\sqrt[15]{-3^{12}}=-\sqrt[5]{3^4}=-\sqrt[5]{81}$.

5. а) $\sqrt{5}=\sqrt[4]{5^2}=\sqrt[4]{25}$ и $\sqrt[4]{2}$.

б) $\sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81}$ и $\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{2^3}=\sqrt[12]{8}$.

в) $\sqrt{3}=\sqrt[12]{3^6}=\sqrt[12]{729}$, $\sqrt[3]{4}=\sqrt[12]{4^4}=\sqrt[12]{256}$ и $\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[12]{125}$.

6. а) От $\sqrt{5}=\sqrt[4]{5^2}=\sqrt[4]{25}$ и $\sqrt[4]{25}<\sqrt[4]{27}$ следва, че $\sqrt{5}<\sqrt[4]{27}$.

б) От $\sqrt{3}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{27}$, $\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[6]{25}$ и $\sqrt[6]{27}>\sqrt[6]{25}$ следва, че $\sqrt{3}>\sqrt[3]{5}$.

в) От $3=\sqrt[5]{3^5}=\sqrt[5]{243}$, $2\sqrt[5]{7}=\sqrt[5]{2^5.7}=\sqrt[5]{224}$ и $\sqrt[5]{243}>\sqrt[5]{243}$ следва че $3>2\sqrt[5]{7}$.

7. ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

1. а) $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}-3\sqrt[4]{\dfrac{1}{9}}=\sqrt[3]{\sqrt{3^2.3}}-\sqrt[4]{\dfrac{3^4}{9}}=\sqrt[6]{3^3}-\sqrt[4]{3^2}=\sqrt[\cancel{3}.2]{3^{\cancel{3}}}-\sqrt[2.\cancel{2}]{3^{\cancel{2}}}=\sqrt{3}-\sqrt{3}=0$.

б) $\sqrt[6]{16}+\sqrt[4]{4}-\sqrt{2}.\sqrt[6]{2}=\sqrt[3.\cancel{2}]{4^{\cancel{2}}}+\sqrt[2.\cancel{2}]{2^{\cancel{2}}}-\sqrt[6]{2^3}.\sqrt[6]{2}=\sqrt[3]{4}+\sqrt{2}-\sqrt[3.\cancel{2}]{2^{2.\cancel{2}}}=\sqrt[3]{4}+\sqrt{2}-\sqrt[3]{4}=\sqrt{2}$.

2. а) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^3}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=$

$=\dfrac{(3-2)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{3-2}-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}+\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt{2}}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

б) $\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}\right)^2=\left(\sqrt[4]{2}\right)^2+2\sqrt[4]{2}.\sqrt[4]{8}+\left(\sqrt[4]{8}\right)^2=\sqrt[4]{2^2}+2\sqrt[4]{16}+\sqrt[4]{2^6}=\sqrt[\cancel{2}.2]{2^{\cancel{2}}}+2.2+2\sqrt[4]{2^2}=$

$=\sqrt{2}+4+2\sqrt{2}=4+3\sqrt{2}$.

в) $\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}\right)\left(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8}\right)=\left(\sqrt[4]{2}\right)^2-\left(\sqrt[4]{8}\right)^2=\sqrt[4]{2^2}-\sqrt[4]{2^6}=\sqrt[\cancel{2}.2]{2^{\cancel{2}}}-\sqrt[\cancel{2}.2]{2^{3.\cancel{2}}}=\sqrt{2}-\sqrt{8}==\sqrt{2}-2\sqrt{2}=-\sqrt{2}$.

3. $A=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$,

$B=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}==\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3+\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}=\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{5}$ и $A-5B\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{9}+\cancel{\sqrt[3]{6}}+\cancel{\sqrt[3]{4}}-\cancel{\sqrt[3]{6}}-\cancel{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{9}$.

4. Корените $\sqrt[6]{16a^5b^4}$ и $\sqrt[6]{4a}$ съществуват при $a\geq 0$, а знаменателят $\sqrt[3]{2a^2b^2}$ – при $a\neq 0$ и $b\neq 0$. Дефиниционното множество на израза е $a>0$, $b\neq 0$.

Тогава $\grave{A}=\dfrac{\sqrt[6]{16a^5b^4}}{\sqrt[3]{2a^2b^2}}-\sqrt[6]{4a}=\dfrac{\sqrt[6]{16a^5b^4}}{\sqrt[6]{4a^4b^4}}-\sqrt[6]{4a}=\sqrt[6]{\dfrac{16a^5b^4}{4a^4b^4}}-\sqrt[6]{4a}=\sqrt[6]{4a}-\sqrt[6]{4a}=0$.

5. а) Коренните показатели на двата корена са нечетни числа и подкоренните изразите съществуват за всяко $x\in\mathbb{R}$.

б) Дефиниционното множество се определя от съществуването на $\sqrt[4]{x^2-x}$, което е изпълнено при $x^2-x\geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;0]\cup[1;\infty)$.

в) Дефиниционното множество се определя от решенията на системата неравенства $\left|\begin{array}{l}x^3-8\geq 0\\ x^2-9\neq 0\end{array}\right.$. От $x^3-8\geq 0 \Leftrightarrow x^3\geq 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3}\geq\sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x\geq 2$ и $x^2-9\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\pm 3$ следва, че търсеното множество е $x\in[2;3)\cup(3;\infty)$.

6. Да обърнем внимание, че $\sqrt[4]{x^2y}$ съществува при $x^2y\geq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R},\ y\geq 0$, като в условието е уточнено, че $x<0<y$. Да припомним, че под знака на корен 4-ти могат да се внасят само неотрицателни числа.

I начин. От $x<0$ следва, че $-x>0$ и $xy\sqrt{x^2y}=-(-x)y\sqrt{x^2y}=-\sqrt{(-x)^2y^2.x^2y}=-\sqrt{x^4y^3}$ (отг. В).

II начин. От $x<0<y$ следва, че $xy\sqrt[4]{x^2y}<0$ и $-x^6y^5<0$.

Тогава отг. А) и Б) са неверни, тъй като корените не съществуват $\left(-x^6y^5<0\right)$.

Отг. Г) е също неверен, тъй като $\sqrt[4]{x^6y^5}$, докато $xy\sqrt[4]{x^2y}<0$.

Следователно верният отговор е В).

8. ГРАФИКИ НА ФУНКЦИИТЕ $\sqrt{x}$, x^3 И $\sqrt[3]{x}$

1. а) Ако n е четно число, то дефиниционното множество на функцията $y=\sqrt[n]{x}$ е $D_f: x\geq 0$. От $y=\sqrt[n]{x}\geq 0$ следва, че графиката е в I квадрант.

От $D_g: x\in\mathbb{R}$ и $g(x)=x^n\geq 0$ следва, че графиката на функцията $g(x)=x^n$ е в I и II квадрант.

б) Ако n е нечетно число, $D_f: x\in\mathbb{R}$, като при $x\geq 0$, $f(x)=\sqrt[n]{x}\geq 0$ (I квадрант), а при $x<0$ $f(x)=\sqrt[n]{x}<0$ (III квадрант).

Аналогично, $D_g: x\in\mathbb{R}$, като при $x\geq 0$, $g(x)=x^n\geq 0$ (I квадрант), а при $x<0$ $g(x)=x^n<0$ (III квадрант). Графиките на двете функции са в I и III квадрант.

2. Нека x_1 и x_2 са произволни реални числа и $x_1<x_2$. От $x_1=\sqrt[n]{x_1^n}$, $x_2=\sqrt[n]{x_2^n}$ и свойството на корените следва, че $x_1<x_2 \Leftrightarrow \sqrt[n]{x_1^n}<\sqrt[n]{x_2^n} \Leftrightarrow x_1^n<x_2^n$.

Следователно $x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^n<x_2^n$, с което доказахме, че функцията $y=x^n$ е строго растяща за всяко $x\in\mathbb{R}$.

4. Означенията са $f(x)=x^3$, $g(x)=\sqrt{x}$ и $h(x)=\sqrt[3]{x}$.

Решенията на уравнението $x^3=\sqrt[3]{x}$ са абсцисите $x=-1$ и $x=1$ на общите точки $(-1;-1)$ и $(1;1)$ на графиките $\tilde{A}_f$ и $\tilde{A}_h$ на двете функции.

Като вземем предвид, че $\tilde{A}_f$ е над $\tilde{A}_g$ при $x>1$, то решенията на неравенството $x^3>\sqrt{x}$ са $x\in(1;\infty)$.

При $0\leq x\leq 1$ $\tilde{A}_g$ е под $\tilde{A}_h$ (при $0<x<1$) или съвпада с нея (при $x=0$ и $x=1$). Следователно решенията на неравенството $\sqrt{x}\leq\sqrt[3]{x}$ са числата $x\in[0;1]$.

5. Абсцисите на общите точки на двете графики са решенията на уравнението $f(x)=g(x)$.

а) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^3=x^5 \Leftrightarrow x^5-x^3=0 \Leftrightarrow x^3(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x_1=0,\ x_{2,3}=\pm 1$. Съответните ординати са $y_1=x_1^3=0$ и $y_{2,3}=x_{2,3}^3=(\pm 1)^3=\pm 1$ и точките са с координати $(0;0)$ и $(\pm 1;\pm 1)$.

б) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^3=3x^2-3x+1 \Leftrightarrow x^3-3x^2+3x-1=0 \Leftrightarrow (x-1)^3=0 \Leftrightarrow x=1$, съответната стойност на y е $y=x^3=1$ и $(1;1)$ са координатите на единствената обща точка на двете графики.

в) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^3=2-x^2 \Leftrightarrow x^3+x^2-2=0 \Leftrightarrow (x^3-1)+(x^2-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2)+(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x+3)=0 \Leftrightarrow x=1 \cup x^2+2x+3=0$.

Квадратното уравнение няма корени ($D<0$).

Следователно $x=1$ е единственото решение на уравнението $f(x)=g(x)$, а общата точка на двете графики е с координати $(1;1)$.

6. а) Координатите на пресечната точка A на двете графики, с точност 0,01, са $(-2{,}32;-1{,}32)$ и уравнението има единствен корен $x\approx -2{,}32$.

б) Координатите на пресечните точки на двете графики, с точност 0,01, са $B(-1{,}37;-1{,}1)$ и $C(2{,}07;1{,}27)$ и уравнението две решения: $x_1\approx -1{,}37$, $x_2\approx -2{,}07$.

9. СТЕПЕН С РАЦИОНАЛЕН ПОКАЗАТЕЛ

1. Доказателство на (2):Нека $a > 0,\ a \in \mathbb{R}$, а $x = \dfrac{m}{n}$ и $y = \dfrac{p}{q}$ са рационални числа. Тогава

$$\frac{\grave{a}^x}{a^y} = \frac{\sqrt[n]{a}^{\frac{m}{n}}}{\grave{a}^{\frac{p}{q}}} = \frac{\sqrt[n]{\ ^m a}}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{\sqrt[nq]{\ ^{mq} a}}{\sqrt[nq]{a^{np}}} = \sqrt[nq]{\frac{^{mq}}{a^{np}}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq}-\frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{x-y}.$$

Доказателство на (5): Ако $a > 0$, $b > 0$ и $x = \dfrac{m}{n}$ е рационално число, то

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \frac{a^x}{b^x}.$$

2. Имаме $2\sqrt{2} = 2.2^{\frac{1}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{9}} = \sqrt[3]{3^{-2}} = 3^{-\frac{2}{3}}$; $\sqrt[9]{\frac{1}{125}} = \sqrt[9]{5^{-3}} = 5^{-\frac{3}{9}} = 5^{-\frac{1}{3}}$;

$\frac{1}{3}\sqrt[6]{\frac{1}{81}} = 3^{-1}\sqrt[6]{3^{-4}} = 3^{-1}.3^{-\frac{4}{6}} = 3^{-1-\frac{2}{3}} = 3^{-\frac{5}{3}}$.

3. Записваме $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(3^{-1}\right)^{-\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3} = \sqrt{27}$; $\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^3} = \sqrt{\sqrt{27}} = \sqrt[4]{27}$;

$\left(2\sqrt[4]{2}\right)^{\frac{2}{5}} = \left(\sqrt[4]{2^5}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[4]{2^{5.\frac{2}{5}}} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$.

4. а) $\dfrac{9^{\frac{1}{4}}.27^{\frac{5}{2}}}{81} = \dfrac{3^{2.\frac{1}{4}}.3^{3.\frac{5}{2}}}{3^4} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{15}{2}-4} = 3^4 = 81$;

5. а) $\sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}}\sqrt{a^{-\frac{1}{3}}\sqrt{a^{\frac{1}{3}}}} = a^{\frac{1}{2.3}}.\sqrt{a^{-\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{3.2}}} = a^{\frac{1}{6}}\sqrt{a^{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{6}}.\sqrt{a^{-\frac{1}{6}}} = a^{\frac{1}{6}}.a^{-\frac{1}{12}} = a^{\frac{1}{6}-\frac{1}{12}} = a^{\frac{1}{12}}$.

10. СТЕПЕН С РАЦИОНАЛЕН ПОКАЗАТЕЛ.УПРАЖНЕНИЕ

1. Изразите, съставящи равенството, съществуват при $a > 0$ и $b > 0$.

Тогава $\left(\dfrac{a^{-1}}{b^{-2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{a^{1.\frac{1}{2}}}{b^{2.\frac{1}{2}}}.a^{\frac{3}{2}.\frac{1}{3}}b^{\frac{7}{2}.\frac{1}{3}} = \dfrac{a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{7}{6}}}{b} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}b^{\frac{7}{6}-1} = a^1b^{\frac{1}{6}} = a\sqrt[6]{b}$.

2. Преобразуваме $a^2\left(\dfrac{a^{\frac{1}{12}}.a^{\frac{5}{6}}}{a^{-\frac{1}{2}}.a^{\frac{3}{8}}}\right)^{-\frac{6}{5}} = a^2.\dfrac{a^{-\frac{1}{12}.\frac{6}{5}}.a^{-\frac{5}{6}.\frac{6}{5}}}{a^{\frac{1}{2}.\frac{6}{5}}.a^{-\frac{3}{8}.\frac{6}{5}}} = \dfrac{a^{-\frac{1}{10}}.a^{-1}}{a^{\frac{3}{5}}.a^{-\frac{9}{20}}} = a^{2-\frac{1}{10}-1-\frac{3}{5}+\frac{9}{20}} = a^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = 2^{4.\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$.

3. Степента $a^{\frac{1}{2}}$ съществува при $a > 0$.

а) Като вземем предвид, че $a + 2a^{\frac{1}{2}} + 1 = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2a^{\frac{1}{2}} + 1 = \left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right)^2$ и $a^{\frac{1}{2}} > 0$, то $\left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right)^2 > 0$, за

$\left(a+2a^{\frac{1}{2}}+1\right)^{\frac{1}{2}}$ не се налагат други ограничения и $D_A : a \in (0;\, \infty)$.

Тогава $A = \left(a+2a^{\frac{1}{2}}+1\right)^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} = \left[\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}+1-a^{\frac{1}{2}} = 1$.

б) Преобразуваме $a-2a^{\frac{1}{2}}+1 = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2a^{\frac{1}{2}}+1 = \left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)^2$.

От $\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)^2 > 0 \Leftrightarrow a^{\frac{1}{2}}-1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$ следва, че дефиниционното множество на израза е

$D_B : a \in (0;\, 1) \cup (1;\, \infty)$.

Тогава $B = \left(a-2a^{\frac{1}{2}}+1\right)^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} = \left[\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}-1-a^{\frac{1}{2}} = -1$. при $a > 1$

и $B = 1-2\sqrt{a}$ при $0 < a \leq 1$.

4. а) От $a = 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$, $b = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{7}{24}} = 4^{\frac{7}{24}} = 2^{2.\frac{7}{24}} = 2^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{128}$ и $125 < 128$ следва, че $\sqrt[12]{125} < \sqrt[12]{128}$ и $a < b$.

б) От $3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{8} = 2 = \sqrt[5]{32} < \sqrt[5]{125} = \sqrt[5]{5^3} = 5^{\frac{3}{5}}$ следва, че $3^{\frac{1}{3}} < 2 < 5^{\frac{3}{5}}$.

5. Дефиниционното множество на израза се определя от решението на системата

$$\left| \begin{array}{l} 2x-1>0 \\ x^2-4>0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x>\dfrac{1}{2} \\ x>2 \ \cup \ x<-2 \end{array} \right. \Leftrightarrow x>2 \text{ и } D_A : x \in (2;\, \infty).$$

Очевидно $2 \notin D_A$.

Преобразуваме $3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$, $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$, $0{,}5^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$ и сравняваме

$\sqrt[3]{9} > \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow \sqrt[3]{9} > 2$, $\sqrt{5} > \sqrt{4} \Leftrightarrow \sqrt{5} > 2$, $\sqrt[4]{8} < \sqrt[4]{16} \Leftrightarrow \sqrt[4]{8} < 2$.

Следователно от дефиниционното множество на израза *A* са числата $3^{\frac{2}{3}}$ и $5^{\frac{1}{2}}$.

11. ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА ИЗРАЗИ, СЪДЪРЖАЩИ СТЕПЕН С РАЦИОНАЛЕН СТЕПЕНЕН ПОКАЗАТЕЛ

1. Полагаме $x=a^{\frac{1}{3}}$, $y=b^{\frac{1}{3}}$, където $a>0$, $b>0$. Тогава $a=x^3$ и $b=y^3$.

а) При $a\neq b$ заместваме $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{x^2-y^2}{x-y}=\dfrac{(x+y)(x-y)}{x-y}=x+y=a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$.

б) Заместваме $\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}=\dfrac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^2+xy+y^2}=x-y=a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}==\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$.

в) При $a\neq b$ заместваме $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}=\dfrac{x+y}{x-y}==\dfrac{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$.

2. а) Полагаме $x=a^{\frac{1}{4}}$, където $a>0$. При $a\neq 1 \Leftrightarrow x^2\neq 1$ заместваме $a=x^4$ в дробта:

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}-4a^{\frac{1}{4}}-5}{a^{\frac{1}{2}}-1}=\frac{x^2-4x-5}{x^2-1}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-5)}{\cancel{(x+1)}(x-1)}=\frac{x-5}{x-1}=\frac{a^{\frac{1}{4}}-5}{a^{\frac{1}{4}}-1}=\frac{\sqrt[4]{a}-5}{\sqrt[4]{a}-1}.$$

б) Полагаме $x=a^{\frac{1}{2}}$, където $a>0$. При $a\neq 1 \Leftrightarrow x^2\neq 1$ заместваме $a=x^2$ в дробта:

$$\frac{a^2-25a}{a-3a^{\frac{1}{2}}-10}=\frac{x^4-25x^2}{x^2-3x-10}=\frac{(x^2-25)x^2}{(x-5)(x+2)}=\frac{(x+5)\cancel{(x-5)}x^2}{\cancel{(x-5)}(x+2)}=\frac{(x+5)x}{x+2}=\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}+5\right)a}{a^{\frac{1}{2}}+2}=\frac{(\sqrt{a}+5)a}{\sqrt{a}+2}.$$

3. Полагаме $a^{\frac{1}{3}}=u$. Тогава $a=u^3$ и лявата страна на израза добива вида

$$\left(\frac{u+2}{u-2}+\frac{u-2}{u+2}-\frac{16}{u^2-4}\right)^{-3}=\left[\frac{(u+2)^2+(u-2)^2-16}{u^2-4}\right]^{-3}=\left[\frac{2(u^2-4)}{u^2-4}\right]^{-3}=2^{-3}=\frac{1}{8}.$$

4*. Полагаме $(x-1)^{\frac{1}{2}}=u$. Тогава $x-1=u^2$ и от $5\le x\le 10$ следва, че $4\le x-1\le 9$ и $2\le u\le 3$.

Заместваме $x-1=u^2$ в дадения израз: $A=(u^2+4-4u)^{\frac{1}{2}}+(u^2+9-6u)^{\frac{1}{2}}=$

$$=\left[\Big(\underbrace{u-2}_{+}\Big)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\Big(\underbrace{3-u}_{+}\Big)^2\right]^{\frac{1}{2}}=u-2+3-u=1.$$

12. СРАВНЯВАНЕ НА СТЕПЕНИ С РАВНИ ОСНОВИ. СТЕПЕН С РЕАЛЕН ПОКАЗАТЕЛ

1. Ще докажем, че ако $0<a<1$, $x_1, x_2\in\mathbb{Q}$ и $a^{x_1}<a^{x_2}$, то $x_1>x_2$.

Доказателство: Нека $x=\dfrac{m}{n}$, $m, n\in\mathbb{N}$. От $0<a<1$ и $m\in\mathbb{N}$ следва, че $a^m<1$. Тогава $a^x=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}<\sqrt[n]{1}=1$, т.е. $a^x<1$.

Ако $n\in\mathbb{N}$, $m<0$ е цяло отрицателно число, то $x=\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}$, $x<0$ и $a^m>1$, тъй като $0<a<1$. Тогава $a^x=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}>\sqrt[n]{1}=1$ и $a^x>1$.

2. Според теореми 1 и 2 за основата a и показателя x на степента a^x следва че:
$2^{1,5}>1\left(a>1,\ x>0\ \Rightarrow\ a^x>1\right)$; $3^{-0,1}<1\left(a>1,\ x<0\ \Rightarrow\ a^x<1\right)$;
$\left(\sqrt{0,2}\right)^{-0,25}>1\left(0<a<1,\ x<0\ \Rightarrow\ a^x>1\right)$; $\left(0,7\right)^{0,7}<1\left(0<a<1,\ x>0\ \Rightarrow\ a^x<1\right)$.

3. а) От $a=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $b=\sqrt[5]{16}=\sqrt[5]{2^4}=2^{\frac{4}{5}}$ и $\frac{1}{2}<\frac{4}{5}$ следва, че $2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{4}{5}}$, $\sqrt{2}<\sqrt[5]{16}$ и $a<b$.

б) Тъй като $a=\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^5=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{2}}$ и $\frac{5}{2}>\sqrt{5}\ \Leftrightarrow\ 5>2\sqrt{5}\ \Leftrightarrow\ \sqrt{25}>\sqrt{20}$, то $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{2}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}$ и $a<b$.

4. а) $\left(\sqrt{5}\right)^x>25\ \Leftrightarrow\ 5^{\frac{x}{2}}>5^2\ \Leftrightarrow\ \frac{x}{2}>2\ \Leftrightarrow\ x>4$.

б) $3^{-x}<\frac{1}{27}\ \Leftrightarrow\ \left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^3\ \Leftrightarrow\ x>3$.

5. а) От $2>\sqrt{3}$ и $a^2<a^{\sqrt{3}}$ следва, че $0<a<1$.

б) От $\sqrt[3]{a}>a^{\frac{1}{4}}\ \Leftrightarrow\ a^{\frac{1}{3}}>a^{\frac{1}{4}}$ и $\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$ следва, че $a>1$.

13. ПОКАЗАТЕЛНА ФУНКЦИЯ. СВОЙСТВА И ГРАФИКА

1. От $y=a^x$ следва, че $y^{\frac{1}{x}}=\left(a^x\right)^{\frac{1}{x}}$ и $a=y^{\frac{1}{x}}$.

а) Заместваме $x=-2$ и $y=4$ в равенството $a=y^{\frac{1}{x}}$ и намираме $a=4^{-\frac{1}{2}}=\left(2^2\right)^{-\frac{1}{2}}=2^{-1}=\frac{1}{2}$. От $0<a<1$ следва, че $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ е намаляваща функция.

б) При $x=\frac{1}{3}$ и $y=2$ пресмятаме $a=y^{\frac{1}{x}}=2^3=8$. От $a>1$ следва, че $y=8^x$ е растяща функция.

2. Графиките на $f_1\left(x\right)=2^{2x}$ и $f_3\left(x\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ са симетрични относно ординатната ос, тъй като $f_1\left(x\right)=2^{2x}=4^x$, $f_3\left(x\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^x=4^{-x}$ и $f_3\left(x\right)=f_1\left(-x\right)$.

3. а) $2^x>128\ \Leftrightarrow\ 2^x>2^7\ \Leftrightarrow\ x>7$.

б) $3^x\le\sqrt{\frac{1}{3}}\ \Leftrightarrow\ 3^x\le 3^{-\frac{1}{2}}\ \Leftrightarrow\ x\le-\frac{1}{2}$.

в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}>\frac{3}{2}\ \Leftrightarrow\ \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}>\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\ \Leftrightarrow\ 2x<-1\ \Leftrightarrow\ x<-\frac{1}{2}$.

4. а) $f\left(x\right)=g\left(x\right)\ \Leftrightarrow\ 2.3^x=3.2^x\ \Leftrightarrow\ \frac{2.3^x}{3.2^x}=1\ \Leftrightarrow\ \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}=1\ \Leftrightarrow\ x-1=0\ \Leftrightarrow\ x=1$.

б) $f\left(x\right)>g\left(x\right)\ \Leftrightarrow\ 2.3^x>3.2^x\ \Leftrightarrow\ \frac{2.3^x}{3.2^x}>1\ \Leftrightarrow\ \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}>1\ \Leftrightarrow\ x-1>0\ \Leftrightarrow\ x>1$.

5. а) $-1 < x < 2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{10}\right)^{-1} > \left(\frac{3}{10}\right)^{x} > \left(\frac{3}{10}\right)^{2} \Leftrightarrow \frac{10}{3} > y > \frac{9}{100}$ и $y \in \left(\frac{9}{100}; \frac{10}{3}\right)$.

б) $-2 \le x < 3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{x} < \left(\frac{3}{2}\right)^{3} \Leftrightarrow \frac{4}{9} \le y < \frac{27}{8}$ и $y \in \left[\frac{4}{9}; \frac{27}{8}\right)$.

в) $3 < x \le 9 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{2}\right)^{3} < \left(\sqrt[3]{2}\right)^{x} \le \left(\sqrt[3]{2}\right)^{9} \Leftrightarrow 2 < y \le 2^{3} \Leftrightarrow 2 < y \le 8$ и $y \in (2; 8]$.

14. ПОКАЗАТЕЛНА ФУНКЦИЯ. СВОЙСТВА И ГРАФИКА. УПРАЖНЕНИЕ

1. Представяме числата като степени на двойката: $a = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{2^{-2}} = 2^{-\frac{2}{3}}$; $b = \frac{\sqrt[4]{8}}{2} = \frac{\sqrt[4]{2^3}}{2} = \frac{2^{\frac{3}{4}}}{2} = 2^{\frac{3}{4}-1} = 2^{-\frac{1}{4}}$; $c = \frac{1}{8} = 2^{-3}$.

От $-3 < -\frac{2}{3} < -\frac{1}{4}$ и свойствата на показателната функция $y = 2^x$ следва, че $2^{-3} < 2^{-\frac{2}{3}} < 2^{-\frac{1}{4}}$ и $c < a < b$.

2. Знаем, че функцията $y = 2^x$ расте за всяко $x \in \mathbb{R}$, т.е. $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2^{x_1} < 2^{x_2}$.

Тогава при $a > 0$: $2^{x_1} < 2^{x_2} \Leftrightarrow a.2^{x_1} < a.2^{x_2}$, а при $a < 0$: $2^{x_1} < 2^{x_2} \Leftrightarrow a.2^{x_1} > a.2^{x_2}$.

От $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a.2^{x_1} < a.2^{x_2}$ следва, че $y = a.2^x$ расте при $a > 0$, а при $a < 0$ $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a.2^{x_1} > a.2^{x_2}$ и функцията $y = a.2^x$ намалява.

3. а) От предходната задача следва, че при $a > 0$ функцията $y = a.2^x$ расте, а при $a < 0$ тя намалява.

Следователно при $a \in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}\right\}$ функцията намалява, а при $a \in \{2, 3\}$ тя расте.

б) От $y = a.2^{-x} = \frac{a}{2^x}$ следва, че при $a > 0$ функцията $y = a.2^{-x}$ ще намалява, а при $a < 0$ тя ще расте.

4. При $1 < x \le 2$ следва, че:

а) $2^{-1} < 2^x \le 2^2 \,|\, .3 \Leftrightarrow \frac{3}{2} < 3.2^x \le 12$ и $y \in \left(\frac{3}{2}; 12\right]$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \ge \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \,|\, .2 \Leftrightarrow 6 > 2.\left(\frac{1}{3}\right)^{x} \ge \frac{2}{9}$ и $y \in \left[\frac{2}{9}; 6\right)$;

в) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} > \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{x} \ge \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2} \,\Big|\, .\left(-\frac{3}{4}\right) < 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}.\frac{2}{\sqrt{3}} < -\frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{x} \le -\frac{3}{4}.\frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} < -\frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{x} \le -\frac{9}{16}$ и $y \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{9}{16}\right]$.

5. а) $2^{x-1} > 2^2 \Leftrightarrow x - 1 > 2 \Leftrightarrow x > 3$.

б) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{x} < 3 \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{3}} < 3^{1} \Leftrightarrow \frac{x}{3} < 1 \Leftrightarrow x < 3$.

в) $25.3^x \ge 9.5^x \Leftrightarrow \frac{3^x}{5^x} \ge \frac{9}{25} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x} \ge \left(\frac{3}{5}\right)^{2} \Leftrightarrow x \le 2$.

15. ЛОГАРИТЪМ. ОСНОВНИ СВОЙСТВА. СРАВНЯВАНЕ НА ЛОГАРИТМИ. ГРАФИКА НА ЛОГАРИТМИЧНА ФУНКЦИЯ

1. $\log_5 0,2 = \log_5 \frac{1}{5} = \log_5 5^{-1} = -1$ (отг. Б).

2. По определение $\log_3 5 = a \Leftrightarrow 3^a = 5$ (отг. Б).

3. Числото $\log_{0,5} 2$ е отрицателно, тъй като $a = 0,5$, $b = 2$, и $0 < a < 1 < b$ (отг. Г).

4. Пресмятаме $a = \log_{13} 1 = 0$ и $b = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} = 1$ и определяме знаците на $c = \log_7 \frac{1}{5}$ и $d = \log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{6}$: $c < 0$, тъй като $0 < \frac{1}{5} < 1 < 7$ и $d > 0$ поради $0 < \frac{1}{7} < 1$ и $0 < \frac{1}{6} < 1$. От направените оценки следва, че $c < a < b$, като тази наредба участва единствено в Г). За пълнота ще сравним $d = \log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{6}$ и $b = 1$. Представяме $b = 1 = \log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{7}$ и от $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{6} < \log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{7}$ и следва, че $d < b$.

5. Пресмятаме $5^{\log_{\sqrt{5}} 4} . \sqrt{\log_2 \sqrt[4]{2}} = \left[\left(\sqrt{5}\right)^2\right]^{\log_{\sqrt{5}} 4} . \sqrt{\log_2 2^{\frac{1}{4}}} = \left[\left(\sqrt{5}\right)^{\log_{\sqrt{5}} 4}\right]^2 . \sqrt{\frac{1}{4}} = 4^2 . \frac{1}{2} = 8$.

16. ЛОГАРИТЪМ. ОСНОВНИ СВОЙСТВА. СРАВНЯВАНЕ НА ЛОГАРИТМИ. ГРАФИКА НА ЛОГАРИТМИЧНА ФУНКЦИЯ. УПРАЖНЕНИЕ

1. $A = 36^{\log_6 5} - \log_3(4 + \log_2 32) = \left(6^2\right)^{\log_6 5} - \log_3\left(4 + \log_2 2^5\right) =$

$= \left(6^{\log_6 5}\right)^2 - \log_3(4+5) = 5^2 - \log_3 9 = 25 - 2 = 23$;

$B = 49^{\log_7 2} - \log_5(22 + \log_5 125) = \left(7^2\right)^{\log_7 2} - \log_5\left(22 + \log_5 5^3\right) =$

$= \left(7^{\log_7 2}\right)^2 - \log_5(22+3) = 2^2 - \log_5 25 = 4 - 2 = 2$;

$C = 5^{\log_{25}\left(3-\sqrt{10}\right)^2} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = \left(25^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{25}\left(3-\sqrt{10}\right)^2} + \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(25^{\log_{25}\left(3-\sqrt{10}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} + 3 =$

$= \left[\left(3-\sqrt{10}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + 3 = \sqrt{\left(3-\sqrt{10}\right)^2} + 3 = \left|\underbrace{3-\sqrt{10}}_{-}\right| + 3 = \sqrt{10} - 3 + 3 = \sqrt{10}$.

2. $x = \left(\log_2 3^{\log_3 64}\right)^{\log_{\sqrt{6}} 3} = \left(\log_2 64\right)^{\log_{\sqrt{6}} 3} = 6^{\log_{\sqrt{6}} 3} = \left[\left(\sqrt{6}\right)^2\right]^{\log_{\sqrt{6}} 3} = \left[\left(\sqrt{6}\right)^{\log_{\sqrt{6}} 3}\right]^2 = = 3^2 = 9$. Тогава $\log_9 81 = 2$.

3. От $\log_{\frac{1}{2}} x + 3.\log_{\frac{1}{2}} x > 4.\log_{\frac{1}{2}} 9 \Leftrightarrow 4.\log_{\frac{1}{2}} x > 4.\log_{\frac{1}{2}} 9 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 9 \Leftrightarrow 0 < x < 9$ следва, че най-голямото цяло число, което е решение на неравенството, е 8.

4. $\log_{\frac{1}{2}} x + 4\log_{\frac{1}{2}} x < 5\log_{\frac{1}{2}} y \Leftrightarrow 5\log_{\frac{1}{2}} x < 5\log_{\frac{1}{2}} y \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} y \Leftrightarrow x > y > 0$. Следователно по-малкото от двете числа е y.

5. При $x > 0$ от $6^{\log_6 x} = x$ следва, че $\frac{1}{4}.6^{\log_6 x} = x - 6 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x = x - 6 \Leftrightarrow x = 4(x-6) \Leftrightarrow x - 4x = 24 \Leftrightarrow 3x = 24$ $x = 8$ (отг. Г).

17. ЛОГАРИТМУВАНЕ НА ПРОИЗВЕДЕНИЕ, ЧАСТНО, СТЕПЕН И КОРЕН

1. в) Пресмятаме: $\log_2 x = 3+\log_4 6-\log_{\sqrt{2}} 3 = \log_2 2^3+\log_{2^2} 6-\log_{2^{\frac{1}{2}}} 3 = \log_2 8+\frac{1}{2}\log_2 6-2\log_2 3 =$
$=\log_2 8+\log_2 6^{\frac{1}{2}}-\log_2 3^2 = \log_2 8+\log_2\sqrt{6}-\log_2 9 = \log_5\frac{8\sqrt{6}}{9}$ **.От** $\log_2 x = \log_2\frac{8\sqrt{6}}{9}$ следва, че $x=\frac{8\sqrt{6}}{9}$.

г) Пресмятаме: $1+\log_9 6-\log_{\sqrt{3}} 2 = \log_3 3+\log_{3^2} 6-\log_{3^{\frac{1}{2}}} 2 = \log_3 3+$
$+\frac{1}{2}\log_3 6-2\log_3 2 = \log_3 3+\log_3 6^{\frac{1}{2}}-\log_3 2^2 = \log_3 3+\log_3\sqrt{6}-\log_3 4 = \log_3\frac{3\sqrt{6}}{4}$.

От $\log_3 x = \log_3\frac{3\sqrt{6}}{4}$ следва, че $x=\frac{3\sqrt{6}}{4}$.

2. $\lg\frac{32}{81} = \lg 32-\lg 81 = \lg 2^5-\lg 3^4 = 5\lg 2-4\lg 3 = 5a-4b$.

3. $m=\log_2 5+2\log_4 3 = \log_2 5+2\log_{2^2} 3 = \log_2 5+\frac{2}{2}\log_2 3 = \log_2 5+\log_2 3 = \log_2 5.3 = \log_2 15$.

От $m=\log_2 15 \Leftrightarrow 2^m = 15$ следва, че m е корен на уравнението $2^x = 15$.

4. $\log_{25} 20 = \frac{\log_2 20}{\log_2 25} = \frac{\log_2 4.5}{\log_2 5^2} = \frac{\log_2 2^2+\log_2 5}{2.\log_2 5} = \frac{2.\log_2 2+\log_2 5}{2.\log_2 5} = \frac{2+m}{2m}$.

18. ЛОГАРИТМУВАНЕ НА ПРОИЗВЕДЕНИЕ, ЧАСТНО, СТЕПЕН И КОРЕН. УПРАЖНЕНИЕ

1. Пресмятаме: $a=\log_4 5 = \log_{2^2} 5 = \frac{1}{2}.\log_2 5$; $b=\log_{125} 36 = \log_{5^3} 6^2 = \frac{2}{3}\log_5 6$; $c = \log_6 32 = \log_6 2^5 = 5.\log_6 2$.

Тогава $abc = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.5.\underbrace{\log_2 5.\log_5 6}_{\log_2 6}.\log_6 2 = \frac{5}{3}.\underbrace{\log_2 6.\log_6 2}_{\log_2 2} = \frac{5}{3}\log_2 2 = \frac{5}{3}.1 = \frac{5}{3}$.

2. От $64^x = 27 \;\Leftrightarrow\; a=\log_{64} 27 = \log_{2^6} 3^3 = \frac{3}{6}\log_2 3 = \frac{1}{2}\log_2 3$ и

$9^x = \sqrt[3]{4} \;\Leftrightarrow\; b=\log_9\sqrt[3]{4} = \log_{3^2} 2^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3.2}\log_3 2 = \frac{1}{3}\log_3 2$ следва, че $ab = \frac{1}{6}.\underbrace{\log_2 3.\log_3 2}_{\log_2 2} = \frac{1}{6}.\log_2 2 = \frac{1}{6}.1 = \frac{1}{6}$.

3. $\frac{\log_7 36}{\log_7 6}-\log_4 25.\log_5\sqrt{2} = \log_6 36-\log_{2^2} 5^2.\log_5 2^{\frac{1}{2}} = 2-\frac{2}{2}.\log_2 5.\frac{1}{2}\log_5 2 =$
$=2-\frac{1}{2}.\underbrace{\log_2 5.\log_5 2}_{\log_2 2} = 2-\frac{1}{2}.\log_2 2 = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

4. $m=\log_7 5.\frac{\log_2 2^{\lg 81}}{\lg 25} = \log_7 5.\frac{\lg 81}{\lg 25} = \log_7 5.\log_{25} 81 = \log_7 5.\log_{5^2} 9^2 = \log_7 5.\frac{2}{2}\log_5 9 = \log_7 5.\log_5 9 = \log_7 9$.

По определение числото $m = \log_7 9$ е корен на уравнението $7^x = 9$.

5. От $b=\log_{25} 6 = \log_{5^2} 6 = \frac{1}{2}\log_5 6 = \log_5\sqrt{6}$ и $\sqrt{6}>2$ следва, че $\log_5\sqrt{6}>\log_5 2$ и $b > a$.

Но $\log_5\sqrt{6}<\log_5 5 \;\Leftrightarrow\; \log_5\sqrt{6}<1$, а $\log_2 3>\log_2 2 \;\Leftrightarrow\; \log_2 3>1$. Следователно $c > 1 > b$ и $c > b > a$.

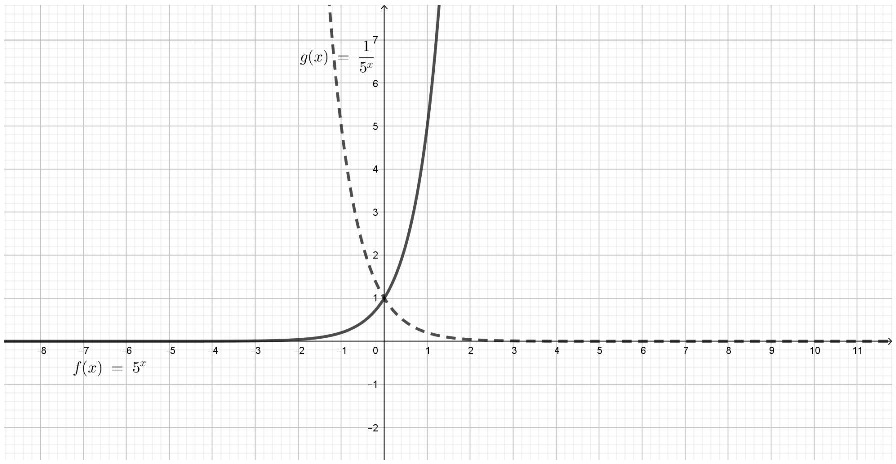
6. $\log_{\frac{1}{3}} x+5\log_{\frac{1}{3}} x>6\log_{\frac{1}{3}} 5 \Leftrightarrow 6\log_{\frac{1}{3}} x>6\log_{\frac{1}{3}} 5 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x>\log_{\frac{1}{3}} 5 \Leftrightarrow 0<x<5$

Следователно най-голямото цяло число, което е решение на неравенството, е $x = 4$.

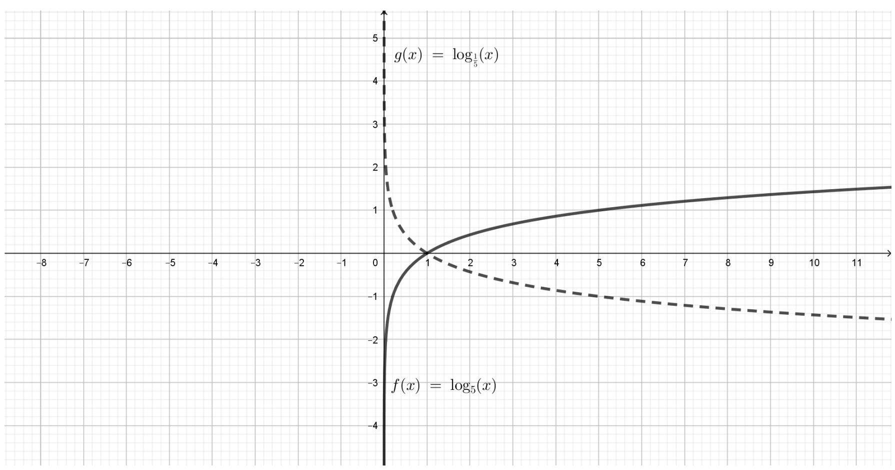
19. СТЕПЕН И ЛОГАРИТЪМ. ТЕМА ЗА САМОКОНТРОЛ

Отговори

1	2	3	4	5
В	В	А	Г	Б



6. $x \le 0$



7. $x \ge 1$

8. $\log_x(\log_2 256) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_x(\log_2 2^8) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_x 8 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_x 2^3 = \frac{3}{2}$

От последното равенство намираме $x^{\frac{3}{2}} = 2^3 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{2}} = 2$ и $x = 4$.

Може да направим и друго преобразуване: $\log_x 2^3 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3\log_x 2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_x 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{2}} = 2 \Leftrightarrow x = 4$.

20. РЕШАВАНЕ НА ТРИЪГЪЛНИК (ПРЕГОВОР)

1. От косинусовата теорема за страната b намираме:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos 60° = 1 + 4 - 2.1.2.\frac{1}{2} = 3$ и $b = \sqrt{3}$ cm.

Мярката на γ може да намерим от: косинусовата теорема: $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1+3-4}{2\sqrt{3}} = 0$ и $\gamma = 90°$;

синусовата теорема: $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} \Leftrightarrow \sin\gamma = \frac{c.\sin 60°}{b} = \frac{2.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.2} = 1$ и $\gamma = 90°$;

обратната теорема на Питагор: от $a^2 + b^2 = c^2$ следва, че $\gamma = 90°$.

От $\beta = 60°$ и $\gamma = 90°$ намираме $\alpha = 30°$.

2. От косинусовата теорема за страната a намираме $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos 45° = 2 + 64 - 2.\sqrt{2}.8.\frac{\sqrt{2}}{2} = 50$ и $a = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ cm.

Тогава $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{50 + 2 - 64}{2.5\sqrt{2}.\sqrt{2}} = -\frac{12}{20} = -\frac{3}{5}$.

От синусовата теорема $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$ намираме $\sin\beta = \frac{b.\sin 45°}{a} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{2}}{5\sqrt{2}.2} = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

3. При $a = 13$, $b = 14$ и $c = 15$ пресмятаме $p = \frac{a+b+c}{2} = 21$ cm,
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21.8.7.6} = \sqrt{7^2.6^2.2^2} = 84$ cm², $h_b = \frac{2S}{b} = \frac{2.84}{14} = 12$ cm и $r = \frac{S}{p} = \frac{84}{21} = 4$ cm.
Ако $BL = l_b\ (L \in AC)$ е ъглополовящата на ΔABC, от $\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{CL} = \frac{15}{13}$ следва, че $AL = 15x$, $CL = 13x$, $AC = AL + CL = 28x = 14$, $x = \frac{1}{2}$ и $AL = \frac{15}{2}$, $CL = \frac{13}{2}$.

Тогава $BL^2 = AB.BC - AL.CL = 15.13 - \frac{15.13}{4} = \frac{3.15.13}{4}$ и $BL = l_b = \frac{3\sqrt{65}}{2}$ cm.
Средната по големина височина е h_b, тъй като е спусната към средната по големина страна $b = 14$. Тогава $h_b = \frac{2S}{b} = \frac{2.84}{14} = 12$ cm.

4. Прилагаме косинусовата теорема за страната a:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos 60° \Leftrightarrow 49 = b^2 + 64 - 2b.8.\frac{1}{2} \Leftrightarrow b^2 - 8b + 15 = 0 \Leftrightarrow b_1 = 3,\ b_2 = 5$.
При $b = 3$ триъгълникът е тъпоъгълен (тогава $c^2 > a^2 + b^2 \Leftrightarrow 64 > 49 + 9$), а при $b = 5$ той е остроъгълен ($c^2 < a^2 + b^2 \Leftrightarrow 64 < 49 + 25$).

При $b = 3$ пресмятаме $m_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2} = \frac{\sqrt{2.49 + 2.9 - 64}}{2} = \frac{\sqrt{52}}{2} = \sqrt{13}$ cm,

$S = \frac{1}{2}bc\sin 60° = \frac{1}{2}.3.8.\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm², $h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2.6\sqrt{3}}{7} = \frac{12\sqrt{3}}{7}$ cm и $R = \frac{abc}{4S} = \frac{3.7.8}{4.6\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ cm.

5. *I* начин. От равенството $4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$ намираме $c^2 = 2a^2 + 2b^2 - 4m_c^2 = 2.225 + 2.169 - 4.49 = 592$ и $c = \sqrt{592} = 2\sqrt{148}$ cm.
Лицето на ΔABC пресмятаме по хероновата формула:
$p = 14 + \sqrt{148}$ и $S = \sqrt{\left(14 + \sqrt{148}\right)\left(\sqrt{148} - 1\right)\left(\sqrt{148} + 1\right)\left(14 - \sqrt{148}\right)} =$
$= \sqrt{\left[14^2 - \left(\sqrt{148}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{148}\right)^2 - 1^2\right]} = \sqrt{48.147} = \sqrt{16.3.3.49} = 4.3.7 = 84$ cm².
II начин. Продължаваме медианата CM до точка D така, че $CM = MD$. Тогава $\Delta AMC \cong \Delta BMD$ и $S_{ABC} = S_{BDC}$. Лицето на ΔBCD със страни 13 cm, 14 cm и 15 cm е $S_{BDC} = 84$ cm² (вж. зад. 3). Следователно $S_{ABC} = 84$ cm².

6. Нека H е петата на перпендикуляра, спуснат от върха C към правата AB.
В случай, че ΔABC е остроъгълен, то H е вътрешна точка за отсечката AB, а ако триъгълникът е тъпоъгълен, то H е външна за страната AB.
От питагоровата теорема за ΔAHC и ΔBHC намираме $AH^2 = AC^2 - CH^2 = 13^2 - 12^2 = 25$ и $AH = 5$ cm, $BH^2 = BC^2 - CH^2 = 15^2 - 12^2 = 81$ и $BH = 9$ cm.
В случая на остроъгълен триъгълник $AB = BH + AH = 9 + 5 = 14$ cm и $S_{ABC} = \frac{AB.CH}{2} = \frac{14.12}{2} = 84$ cm², а ако триъгълникът е тъпоъгълен, то $AB = BH - AH = 9 - 5 = 4$ cm и $S_{ABC} = \frac{AB.CH}{2} = \frac{4.12}{2} = 24$ cm².

21. УСПОРЕДНИК И ТРАПЕЦ (ПРЕГОВОР)

1. От $\sphericalangle BAM = \sphericalangle MAD$ (AM е ъглополовяща на $\sphericalangle BAD$) и $\sphericalangle AMD = \sphericalangle BAM$ (кръстни ъгли) следва, че $\sphericalangle MAD = \sphericalangle AMD = x$, ΔAMD е равнобедрен с бедра $AD = MD$.

Тогава $\underline{AB} = CD = 2MD = \underline{2AD}$ (M е среда на CD), $BC = MC$ и $\sphericalangle CBM = \sphericalangle CMB = y$.

Но $\sphericalangle ABM = \sphericalangle BMC = y$ (кръстни ъгли) и от $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC = 180° \Leftrightarrow 2x + 2y = 180°$ следва, че $x + y = 90°$ и ΔAMB е правоъгълен.

Следователно невярно е твърдението Г).

Забележка. Твърдението Г) ще бъде вярно само ако $\sphericalangle BAD = 60°$, което е частен случай.

2. От задача 2 в урока следва, че $S_{ABCD} = \dfrac{h_a h_b}{\sin 60°} = \dfrac{12.5\sqrt{3}.2}{\sqrt{3}} = 120$ cm^2.

3. От $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{BHDF}} = \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow \dfrac{AB.DH}{BH.DH} = \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow \dfrac{AB}{BH} = \dfrac{5}{3}$ намираме $BH = \dfrac{3AB}{5} = \dfrac{3.10}{5} = 6$ cm и $AH = AB - BH = 10 - 6 = 4$ cm.

В ΔAHD пресмятаме $DH^2 = AD^2 - AH^2 = 36 - 16 = 20$ и $DH = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ cm.

Лицето на успоредника е $S_{ABCD} = AB.DH = 10.2\sqrt{5} = 20\sqrt{5}$ cm^2.

6. Ако $AB = a$ и $CD = b = 5$ са основите на трапеца, от DP⊥AB следва, че $AP = \dfrac{a-b}{2}$.

От $AP = 2$ намираме $\dfrac{a-b}{2} = 2 \Leftrightarrow a = b + 4 = 9$ cm.

В правоъгълния ΔAPD $h = DP = AP.\mathrm{tg}\,60° = 2\sqrt{3}$ cm.

Следователно $S_{ABCD} = \dfrac{a+b}{2}h = \dfrac{9+5}{2}.2\sqrt{3} = 14\sqrt{3}$ cm^2.

7. От $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD$ (AC е ъглополовяща на $\sphericalangle BCD$) и $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BAC$ (кръстни ъгли) следва, че $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BAC$, ΔACB е равнобедрен с бедра $AB = BC = 20$ cm.

Точката P е средата на диагонала AC, тъй като лежи на средната основа на трапеца.

Тогава в ΔABC и ΔACD PN и MP са средни отсечки и $PN = \dfrac{1}{2}AB = 10$ cm, $MP = \dfrac{2}{5}PN = 4$ cm и $CD = 2MP = 8$ cm.

Основите на трапеца са $AB = 20$ cm и $CD = 8$ cm.

8. Означаваме $AB = a$, $CD = b$. В равнобедрения трапец $AH = \dfrac{a-b}{2}$.

По условие P е от средната основа, от което следва, че P е среда на AC и DH.

Тогава $AHCD$ е успоредник и $AH = CD \Leftrightarrow \dfrac{a-b}{2} = b \Leftrightarrow a = 3b$.

Следователно $AB : CD = 3 : 1$.

22. ЛИЦЕ НА ЧЕТИРИЪГЪЛНИК

1. От косинусовата теорема в ΔACD пресмятаме

$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD.CD.\cos 120° = 36 + 100 + 2.6.10.\dfrac{1}{2} = 196$ и $AC = 14$ cm, а от хероновата формула за ΔABC намираме $p = \dfrac{AB + BC + AC}{2} = \dfrac{15+13+13}{2}4 = 21$ cm и $S_{ABC} = \sqrt{21.6.7.8} = 84$ cm^2. Тогава

$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 84 + \frac{1}{2} AD.CD.\sin 120° = 84 + \frac{1}{2}.6.10.\frac{\sqrt{3}}{2} = 84 + 15\sqrt{3}$ cm^2.

2. При фиксирани диагонали d_1 и d_2 на четириъгълника лицето му $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 . \sin\varphi$ ще е е най-голямо, когато стойността на $\sin\varphi$ е най-голяма. Последното е изпълнено при $\varphi = 90°$ (отг. В).

4. Пресмятаме $S_1 = \frac{1}{2} d_1 d_2 . \sin 60° = \frac{1}{2} d_1 d_2 . \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d_1 d_2 \sqrt{3}}{4}$, $S_2 = \frac{1}{2} d_1 d_2 . \sin 90° = \frac{1}{2} d_1 d_2 . 1 = \frac{d_1 d_2}{2}$,

$S_3 = \frac{1}{2} d_1 d_2 . \sin 135° = \frac{1}{2} d_1 d_2 . \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{d_1 d_2 \sqrt{2}}{4}$ и $S_1 = \frac{1}{2} d_1 d_2 . \sin 150° = \frac{1}{2} d_1 d_2 . \frac{1}{2} = \frac{d_1 d_2}{4}$.

От $\frac{d_1 d_2}{4} < \frac{d_1 d_2 \sqrt{2}}{4} < \frac{d_1 d_2 \sqrt{3}}{4} < \frac{d_1 d_2}{2}$ следва, че $S_4 < S_3 < S_1 < S_2$.

5. От $y_A = y_C = 2$ и $x_B = x_D = 4$ следва, че $AC \| Ox$, $BD \| Oy$, $AC \perp BD$, $AC = x_C - x_A = 12$ и $BD = y_D - y_B = 10$.

Следователно $S_{ABCD} = \frac{AC.BD}{2} = \frac{12.10}{2} = 60$.

6. В правоъгълна координатна система са построени точките $A(3;1)$, $B(6;2)$, $C(4;5)$ и $D(1;4)$. Определете вида на четириъгълника $ABCD$ и пресметнете лицето му.

Решение*:* От $AN = CQ = 3$, $BN = QD = 1$ и $\sphericalangle N = \sphericalangle Q = 90°$ следва, че $\Delta ANB \cong \Delta CQD$. Аналогично $\Delta BPC \cong \Delta DMA$ ($BP = DM = 3$, $CP = AM = 2$, $\sphericalangle M = \sphericalangle P = 90°$).

От еднаквостта на триъгълниците следва $AB = CD$ и $BC = AD$, което означава, че $ABCD$ е успоредник.

Лицето на $ABCD$ представяме като разлика от лицето S_{MNPQ} на правоъгълника $MNPQ$ и сбора от лицата на правоъгълните триъгълници ANB, BPC, CQD и DMA.

$S_{ABCD} = S_{MNPQ} - (S_{ANB} + S_{BPC} + S_{CQD} + S_{DMA}) = 5.4 - \left(\frac{3.1}{2} + \frac{3.2}{2} + \frac{3.1}{2} + \frac{3.2}{2}\right) = 20 - 9 = 11$ кв.ед.

23. РЕШАВАНЕ НА УСПОРЕДНИК

1. а) От равенството $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$ намираме $2b^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2a^2 = 256 + 144 - 74 = 326$, $b^2 = 163$ и $b = \sqrt{163}$ cm.

б) От равенството $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$ пресмятаме $d_1^2 = 2a^2 + 2b^2 - d_2^2 = 2.36 + 2.16 - 25 = 79$ и $d_1 = \sqrt{79}$ cm.

в) От $2a^2 + 2b^2 = d_1^2 + d_2^2 = 226$ следва, че $a^2 + b^2 = 113$. За a и b получаваме системата $\left| \begin{array}{l} a + b = 15 \\ a^2 + b^2 = 113 \end{array} \right.$ с решения $a = 8$, $b = 7$ или $a = 7$, $b = 8$. От $a > b$ следва, че страните на успоредника са $a = 8$, $b = 7$.

2. От $AC = BC = 7$ cm и равенството $AD^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2$ следва, че $AD^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2 = 2.16 + 2.49 - 49 = 81$ и $AD = 9$ cm.

3. От $S_{ABCD} = S_{MNPQ} + S_{AMQ} + S_{BMN} + S_{CNP} + S_{DPQ}$ и доказаното в зад. 3 от урока равенство $S_{ABCD} = 2S_{MNPQ}$ следва, че $S_{MNPQ} = S_{AMQ} + S_{BMN} + S_{CNP} + S_{DPQ}$.

4. Нека успоредникът $ABCD$ със страни $AB = 6$ cm, $AD = 4$ cm и остър $\sphericalangle BAD = \alpha$ има лице $S = 6\sqrt{7}$ cm^2. По-малкият диагонал е BD, тъй като лежи срещу острия ъгъл α на успоредника.

От $S = AB.AD.\sin\alpha$ намираме $\sin\alpha = \dfrac{S}{AB.AD} = \dfrac{6\sqrt{7}}{4.6} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

Тогава $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\dfrac{7}{16}} = \sqrt{\dfrac{9}{16}} = \dfrac{3}{4}$, $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.BD.\cos\alpha = = 36+16-2.6.4.\dfrac{3}{4} = 16$ и $BD = 4$ cm.

5. а) От $AM : MB = CN : NB = 1:2$ и обратната теорема на Талес следва, че $MN \| AC$. Тогава $\Delta MBN \sim \Delta ABC$, $\dfrac{MN}{AC} = \dfrac{MB}{AB} = \dfrac{2}{3}$ и $MN = \dfrac{2}{3}AC$.

Аналогично доказваме, че $QP \| AC$ и $QP = \dfrac{2}{3}AC$, $PN \| BD \| QM$ и $PN = QM = \dfrac{1}{3}BD$.

От тези равенства (или от успоредността) следва, че $MNPQ$ е успоредник.

б) Като вземем предвид, че $\sphericalangle AOD = \sphericalangle MQP = \varphi$ ($FOEQ$ е успоредник, $O = AC \cap BD$, $E = AC \cap MQ$, $F = QP \cap BD$), за лицето на $MNPQ$ намираме:

$$S_{MNPQ} = QP.QM.\sin\varphi = \frac{2AC}{3}.\frac{BD}{3}.\sin\varphi = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{2}AC.BD.\sin\varphi\right) = \frac{4}{9}S_{ABCD} = \frac{4}{9}.18 = 8 \text{ cm}^2.$$

6. Означаваме $AD = b$ и от косинусовата теорема за ΔABD намираме

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD.AB.\cos 60^\circ \Leftrightarrow 49 = b^2 + 64 - 2b.8.\frac{1}{2} \Leftrightarrow \Leftrightarrow b^2 - 8b + 15 = 0 \Leftrightarrow b_1 = 3,\ b_2 = 5.$$

От равенството $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$ определяме $AC^2 = 2.64 + 2b^2 - 49 = 2b^2 + 79$.

Ако $AD = b = 3$ cm, то $AC = \sqrt{97}$ cm.

Ако $AD = b = 5$ cm, то $AC = \sqrt{129}$ cm.

24. РЕШАВАНЕ НА УСПОРЕДНИК. УПРАЖНЕНИЕ

1. От $AB = CD = 6$ и $PD = 3$ следва, че координатите на двата върха са $B(6;\ 0)$ и $D(2;\ 2\sqrt{3})$. Тогава $BD = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2} = \sqrt{(6-2)^2 + (0-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16+12} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

2. В успоредника $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD = 30^\circ$.

От $\sphericalangle ABD = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ (периферен ъгъл) и $\sphericalangle BCD = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ (вписан ъгъл) следва, че $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BCD = 30^\circ$.

Тогава ΔABD е равнобедрен, $AD = BD = 6$ cm, $\sphericalangle ADB = 120^\circ$, $S_{ABD} = \dfrac{1}{2}AD.BD.\sin 120^\circ = \dfrac{1}{2}.6.6.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ и $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 18\sqrt{3}$ cm².

3. От равенството $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$ и $a^2 + b^2 = 17$ намираме, че $d_1^2 + d_2^2 = 34$.

Заместваме $d_1 = 8 - d_2$ в равенството $d_1^2 + d_2^2 = 34$ и намираме

$(8-d_2)^2 + d_2^2 = 34 \Leftrightarrow 2d_2^2 - 16d_2 + 30 = 0 \Leftrightarrow d_2^2 - 8d_2 + 15 = 0$ с корени $d_1 = 5$ и $d_2 = 3$.

От $d_1 > d_2$ и $d_1 + d_2 = 8$ следва, че $d_2 < 4$.

Тогава $d_2 = 3$ и $d_1 = 5$.

4. От теоремата на Вариньон следва, че $MNPQ$ е успоредник. Като вземем предвид, че $MQ = \dfrac{BD}{2} = 3$ (MQ е средна отсечка в ΔABD), от равенството $MP^2 + NQ^2 = 2MN^2 + 2MQ^2$ намираме $16 + 18 = 2MN^2 + 18$ и $MN = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Но $AC = 2MN$ (MN е средна отсечка в ΔABC) и следователно $AC = 4\sqrt{2}$ cm.

5. Означаваме $MC = MD = x$, $AD = BC = y$ и прилагаме косинусовата теорема в ΔAMD и ΔBMC:

$AD^2 + MD^2 - 2AD.MD.\cos 120° = AM^2 \Leftrightarrow y^2 + x^2 + xy = 36\ (1)$;

$BC^2 + MC^2 - 2BC.MC.\cos 60° = BM^2 \Leftrightarrow y^2 + x^2 - xy = 16\ (2)$.

Изваждаме почленно равенствата (1) и (2)и получаваме $2xy = 20$ и $xy = 10$.

Лицето на успоредника е $S_{ABCD} = AB.AD.\sin 60° = 2xy.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$ cm².

6. Нека страните на успоредника $ABCD$ са $AB = a$, $AD = b$, O е пресечната точка на диагоналите $AC = d_1$ и $BD = d_2$ и $\sphericalangle AOD = \varphi$.

Прилагаме косинусовата теорема за ΔAOB и ΔAOD:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO.BO.\cos(180° - \varphi) \Leftrightarrow a^2 = \frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4} + 2.\frac{d_1}{2}.\frac{d_1}{2}.\cos\varphi \qquad (1)$$

$$AD^2 = AO^2 + DO^2 - 2AO.DO.\cos\varphi \Leftrightarrow b^2 = \frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4} - 2.\frac{d_1}{2}.\frac{d_1}{2}.\cos\varphi \qquad (2)$$

Изваждаме почленно равенствата (1) и (2) и получаваме, че $a^2 - b^2 = d_1 d_2 \cos\varphi$ и $d_1 d_2 = \dfrac{a^2 - b^2}{\cos\varphi}$ (да обърнем внимание, че от $a \neq b$ следва, че $\varphi \neq 90°$ и $\cos\varphi \neq 0$).

Тогава $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} d_1 d_2.\sin\varphi = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a^2 - b^2}{\cos\varphi}.\sin\varphi = \dfrac{a^2 - b^2}{2}.\text{tg}\,\varphi$.

Следователно лицето на успоредника е $S = \dfrac{a^2 - b^2}{2}.\text{tg}\,\varphi$.

7. Нека $AC = d_1$ и $BD = d_2$ са диагоналите на успоредника $ABCD$, а страните $AB = a$ и $AD = b$ определят остър $\sphericalangle BAD = \alpha$.

Прилагаме косинусовата теорема за ΔACD и ΔBAD:

$$AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2CD.AD.\cos(180° - \alpha) \Leftrightarrow d_1^2 = a^2 + b^2 + 2ab.\cos\alpha \qquad (1)$$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos\alpha \Leftrightarrow d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\alpha \qquad (2)$$

Изваждаме почленно равенствата (1) и (2) и получаваме, че $d_1^2 - d_2^2 = 4ab.\cos\alpha$ и $ab = \dfrac{d_1^2 - d_2^2}{4\cos\alpha}$ (да обърнем внимание, че от $d_1 \neq d_2$ следва, че $\alpha \neq 90°$ и $\cos\alpha \neq 0$).

Тогава $S_{ABCD} = ab.\sin\alpha = \dfrac{d_1^2 - d_2^2}{4\cos\alpha}.\sin\alpha = \dfrac{d_1^2 - d_2^2}{4}.\text{tg}\,\alpha$.

Следователно лицето на успоредника е $S = \dfrac{d_1^2 - d_2^2}{4}.\text{tg}\,\alpha$.

25. РЕШАВАНЕ НА ТРАПЕЦ (ПРЕГОВОР)

1. Нека трапецът е $ABCD$ с основи $AB = a$, $CD = b$ и височина $DH = h$. Тогава $BH = \dfrac{a+b}{2} = 9$ cm, а от $S = \dfrac{a+b}{2}h \Leftrightarrow 108 = 9h$ намираме $DH = 12$ cm.

В правоъгълния ΔBHD пресмятаме $BD^2 = BH^2 + DH^2 = 81 + 144 = 225$ и $BD = 15$ cm.

Сборът от дължините на диагоналите на трапеца е $AC + BD = 2BD = 30$ cm.

2. Вписаният трапец $ABCD$ е равнобедрен.

От $AD = R$ и синусовата теорема $AD = 2R\sin\sphericalangle ABD \Leftrightarrow \sin\sphericalangle ABD = \dfrac{1}{2}$ или от $\sphericalangle AOD = 60°$ следва, че $\sphericalangle ABD = 30°$.

I начин. Нека $AB = a$, $CD = b$, а $DH = h$ е височината на трапеца.
Тогава $BH = \dfrac{a+b}{2}$ и от ΔBHD намираме $DH = BD.\sin 30° = 4.\dfrac{1}{2} = 2$ cm и $BH = BD.\cos 30° = 4.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm.
Следователно $S_{ABCD} = \dfrac{a+b}{2}.h = BH.DH = 2\sqrt{3}.2 = 4\sqrt{3}$ cm^2.
II начин. Нека $AC \cap BD = P$. Тогава $AC = BD = 4$ cm, $\sphericalangle APD = 60°$ (външен ъгъл за равнобедрения ΔAPB) и $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD.\sin 60° = \dfrac{1}{2}.4.4.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm^2.

3. Построяваме височината CH на трапеца.

Като вземем предвид, че $AD = CH = 2r = 8$, от правоъгълния ΔBHC изразяваме $\sin\sphericalangle B = \dfrac{CH}{BC} \Leftrightarrow \dfrac{8}{10} = \dfrac{8}{BC}$ и намираме $BC = 10$ cm.
Но $AB + CD = AD + BC = 8 + 10 = 18$ (свойство на описан четириъгълник).
Следователно $S_{ABCD} = \dfrac{AB+CD}{2}.CH = \dfrac{18.8}{2} = 72$ cm^2.

4. От $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CD} = 4:3:2$ означаваме $\overset{\frown}{AB} = 4x$, $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AD} = 3x$ и $\overset{\frown}{CD} = 2x$.
От $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AD} = 12x = 360°$ намираме $x = 30°$, $\overset{\frown}{AB} = 120°$, $\overset{\frown}{BC} = 90°$, $\overset{\frown}{CD} = 60°$ и

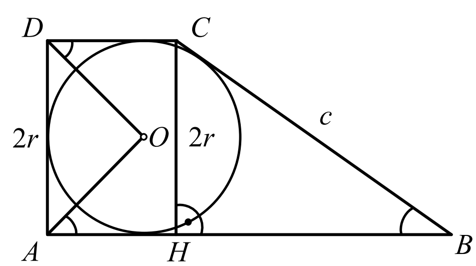
$\sphericalangle ACB = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = 60°$, $\sphericalangle BAC = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = 45°$, $\sphericalangle CAD = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CD} = 30°$.

От синусовата теорема следва, че $AB = 2R.\sin 60° = 2.4\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 12$ cm,

$AD = BC = 2R.\sin 45° = 2.4\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{6}$ cm и $CD = 2R.\sin 30° = 2.4\sqrt{3}.\dfrac{1}{2} = 4\sqrt{3}$ cm.

Ъглите на трапеца са $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC = 75°$ и $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BCD = 105°$.

5. В трапеца $ABCD$ отсечките AO и DO са ъглополовящи на $\sphericalangle$ и $\sphericalangle D$. От $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180°$ и $\sphericalangle BAO = \sphericalangle CDO$ следва, че $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$ и $AD = 2r$.
Означаваме $BC = c$ и от $AB + CD = AD + BC = 2r + c = p$ (свойство на описания четириъгълник) и



$S = pr \Leftrightarrow 18 = (2r + c)r \Leftrightarrow \left(2\sqrt{3} + c\right)\sqrt{3} = 18$ намираме $c = 4\sqrt{3}$ cm.
Построяваме височината $CH = 2r$ и от ΔBHC намираме:
$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{36} = 6$; $\sin\sphericalangle B = \dfrac{CH}{BC} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$ и $\sphericalangle B = 30°$.

От $BH = AB - CD = 6$ и $AB + CD = 2r + c = 6\sqrt{3}$ получаваме $AB = 3\sqrt{3} + 3$ и $CD = 3\sqrt{3} - 3$.

Страните на трапеца са $AB = 3\left(\sqrt{3} + 1\right)$ cm, $CD = 3\left(\sqrt{3} - 1\right)$ cm, $AD = 2\sqrt{3}$ cm, $BC = 4\sqrt{3}$ cm, а ъглите – $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, $\sphericalangle B = 30°$, $\sphericalangle C = 150°$.

26. РЕШАВАНЕ НА ТРАПЕЦ

1. Да означим $AB = a$, $CD = b$, $BC = c$.

Пренасяме успоредно бедрото AD. В ΔBCE $BC = c$, $BE = a - b = 2c$ и $\sphericalangle CBE = 60°$.

Ще докажем, че $\sphericalangle BCE = 90°$, от което следва, че $AD \perp BC$.

I начин. Пресмятаме $CE^2 = BC^2 + BE^2 - 2BC.BE.\cos 60° = c^2 + 4c^2 - 2c^2 = 3c^2$. От $BC^2 + CE^2 = 4c^2 = BE^2$ следва, че $\sphericalangle BCE = 90°$.

II начин. В ΔBCE построяваме медианата CM. Тогава $BM = c$, ΔMBC е равностранен и $CM = c$. Получихме, че $CM = \frac{1}{2}BE$, от което следва, че $\sphericalangle BCE = 90°$.

2. През точка C построяваме отсечка $CM \parallel AD$ $(M \in AB)$ и нека h е височината на трапеца.

В успоредника $AMCD$ $AM = CD = 11$ cm и $MC = AD = 25$ cm.

По хероновата формула пресмятаме лицето на ΔMBC със страни $MC = 25$ cm, $MB = 17$ cm и $BC = 26$ cm:

$p = 34$ и $S_{MBC} = \sqrt{34(34-25)(34-17)(34-26)} = \sqrt{34.9.17.8} = \sqrt{2.17.9.17.8} = \sqrt{3^2.4^2.17^2} = 3.4.17$ cm^2.

От $S_{MBC} = \frac{MB.h}{2}$ намираме $h = \frac{2S_{MBC}}{MB} = \frac{2.3.4.\cancel{17}}{\cancel{17}} = 24$ cm.

Следователно $S_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2}.h = \frac{28+11}{2}.24 = 39.12 = 468$ cm^2.

3. Нека N и M са средите на основите $AB = a$ и $CD = b$ на трапеца $ABCD$. Построяваме $MP \parallel AD$, $MQ \parallel BC$.

От успоредниците $ADMP$ и $BCMQ$ намираме $AP = DM = CM = BQ = \frac{b}{2}$.

Тогава $PQ = a - b$, $PN = NQ = \frac{a-b}{2}$ и MN е медиана в ΔPMQ.

1\. Нека $AD \perp BC$.

Тогава ΔPMQ е правоъгълен, MN е медиана към хипотенузата и $MN = \frac{PQ}{2} = \frac{a-b}{2}$.

2\. Нека $MN = \frac{a-b}{2}$.

Тогава медианата $MN = \frac{PQ}{2}$, $\sphericalangle PMQ = 90°$ и от $MP \parallel AD$, $MQ \parallel BC$ следва, че $AD \perp BC$.

4. Нека M и N са средите съответно на CD и AB. През точката M построяваме $MP \parallel AD$ и $MQ \parallel BC$ $(P, Q \in AB)$ (успоредно пренасяне на двете бедра).

В ΔMPQ със страни $MP = AD = 2\sqrt{2}$ cm, $MQ = BC = 3\sqrt{2}$ cm и $PQ = AB - CD$ отсечката MN е медиана.

От равенството $4MN^2 = 2MP^2 + 2MQ^2 - PQ^2 \Leftrightarrow 4.4 = 2.8 + 2.18 - PQ^2$ намираме $PQ^2 = 36$ и $PQ^2 = 6$ cm.

От $\frac{AB+CD}{2} = 7 \Leftrightarrow AB + CD = 14$ и $AB - CD = PQ = 6$ следва, че $AB = 10$ cm, $CD = 4$ cm.

5. Нека $AC \cap BD = O$ и $\sphericalangle AOB = \varphi$.

Построяваме права $CE \parallel DB$ $(E \in AB)$. Тогава $\sphericalangle ACE = \varphi$, $BDCE$ е успоредник, $BE = CD = b$ и $AE = a + b$.

От $M \in s_{AC}$ следва, че $CM = AM = \frac{a+b}{2}$.

В ΔACE CM е медиана и $CM = \frac{1}{2}AE$. Тогава $\varphi = 90°$ и следователно $AC \perp BC$.

27. РЕШАВАНЕ НА ТРАПЕЦ. УПРАЖНЕНИЕ

1. Нека в трапеца $ABCDDH$ е височина и $AC \cap BD = O$. Тогава ΔAOB е равнобедрен, $BH = \dfrac{AB+CD}{2}$ (свойства на равнобедрения трапец) и $S_{ABCD} = \dfrac{AB+CD}{2}.DH = BH.DH$.

I случай. $\sphericalangle AOB = 60^\circ$.

Тогава $\sphericalangle ABO = 60^\circ$ и от правоъгълния ΔBHD намираме $BH = DH.\text{cotg}\,60^\circ = 6.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ cm.

Следователно $S_{ABCD} = BH.DH = 2\sqrt{3}.6 = 12\sqrt{3}$ cm^2.

II случай. $\sphericalangle BOC = 60^\circ$.

Тогава $\sphericalangle ABO = 30^\circ$ и от правоъгълния ΔBHD намираме $BH = DH.\text{cotg}\,30^\circ = 6\sqrt{3}$ cm.

Следователно $S_{ABCD} = BH.DH = 6\sqrt{3}.6 = 36\sqrt{3}$ cm^2.

2. Построяваме $DH \perp AB$. Тогава $AH = \dfrac{AB-CD}{2} = \dfrac{5-2}{2} = \dfrac{3}{2}$ cm.

В ΔAHD от $AD = 2AH$ следва, че $\sphericalangle A = 60^\circ$ ($\cos\sphericalangle A = \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sphericalangle A = 60^\circ$ или от $\dfrac{AH}{AD} = \dfrac{1}{2}$ и $\sphericalangle ADH = 30^\circ$).

В ΔABD прилагаме косинусовата теорема: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos 60^\circ = 25+9-2.5.3.\dfrac{1}{2} = 19$ и $BD = \sqrt{19}$ cm.

От синусовата теорема за ΔABD намираме $\dfrac{BD}{\sin 60^\circ} = 2R$ и $R = \dfrac{BD}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{\sqrt{19}}{2.\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{57}}{3}$ cm.

3. а) Нека в трапеца $ABCD$ $AD = \sqrt{3}$ cm, $BC = 1$ cm, $\sphericalangle(AD, BC) = 30^\circ$, $\sphericalangle A = \alpha$ и $\sphericalangle B = \beta$.

Построяваме точка $M \in AB$ така, че $CM \parallel AD$.

Тогава $MC = AD = \sqrt{3}$ cm, $\sphericalangle(AD, BC) = \sphericalangle MCB = 30^\circ$ и $\sphericalangle BMC = \alpha$.

От косинусовата теорема за ΔBMC пресмятаме $BM^2 = BC^2 + MC^2 - 2BC.MC.\cos 30^\circ = 1+3-2.1.\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 1$ и $BM = 1$ cm.

От $BM = BC = 1$ следва, че ΔMBC е равнобедрен и $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$.

Следователно ъглите на трапеца $ABCD$ са: $\sphericalangle A = 30^\circ$, $\sphericalangle B = 120^\circ$, $\sphericalangle C = 60^\circ$, $\sphericalangle D = 150^\circ$.

б) От $CD = BC = 1$ cm и $\sphericalangle BCD = 60^\circ$ следва, че ΔBCD е равностранен и $BD = 1$ cm.

От косинусовата теорема за страната AC в ΔACD намираме

$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD.CD.\cos 150^\circ = 3+1+2.\sqrt{3}.1.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4+3 = 7$ и $AC = \sqrt{7}$ cm.

Получихме, че диагоналите на трапеца са с дължини $AC = \sqrt{7}$ cm и $BD = 1$ cm.

4*. От $\sphericalangle MBC = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{MC}$ (вписан ъгъл) и $\sphericalangle DMC = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{MC}$ (периферен ъгъл) следва, че $\sphericalangle MBC = \sphericalangle DMC$.

Като вземем предвид, че $\sphericalangle MCB = \sphericalangle MCD$ и $\sphericalangle BMC = 90^\circ$ ($M \in k$ с диаметър BC) получаваме, че $\sphericalangle MDC = 90^\circ$ и $\sphericalangle BAD = 90^\circ$, тъй като $AB \parallel CD$.

Ако H е пресечната точка на AB и k, то $\sphericalangle CHB = 90^\circ$, $AHCD$ е правоъгълник и $CH = AD$.

В правоъгълния ΔBHC $\sin\sphericalangle HBC = \dfrac{CH}{BC} = \dfrac{AD}{BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sphericalangle HBC = 60^\circ$.

Тогава $\sphericalangle BCD = 120^\circ$, $\sphericalangle BCM = \sphericalangle MCD = 60^\circ$ и от правоъгълните триъгълници MCD, BMC и BHC намираме:
$CD = MC.\cos 60^\circ = 1$ cm, $BC = \dfrac{MC}{\cos 60^\circ} = 4$ cm, $BH = BC.\cos 60^\circ = 2$ cm и $CH = BC.\sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$ cm.
Страните на трапеца са $CD = 1$ cm, $BC = 4$ cm, $AB = BH + AH = BH + CD = 3$ cm и $AD = CH = 2\sqrt{3}$ cm, а ъглите – $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ADC = 90^\circ$, $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ и $\sphericalangle BCD = 120^\circ$.

28. РЕШАВАНЕ НА ЧЕТИРИЪГЪЛНИК

1. От $AC = 2R$ следва, че AC е диаметър и $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 90^\circ$.
В правоъгълните триъгълници ABC и ACD с хипотенуза $AC = 2R$ пресмятаме $AB = BC = R\sqrt{2}$, $AD = R\sqrt{3}$.
Тогава $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \dfrac{AB.BC}{2} + \dfrac{AD.CD}{2} = \dfrac{2R^2}{2} + \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)R^2}{2} = 4 + 2\sqrt{3}$ cm².

2. От $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle ACD = 40^\circ$ следва, че $\sphericalangle ACD = 20^\circ$. Тогава $\sphericalangle ABD = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AD} = \sphericalangle ACD = 20^\circ$ (вписани ъгли), $\sphericalangle BOC = \sphericalangle BAO + \sphericalangle ABO = 60^\circ$ (външен ъгъл за ΔAOB) и $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD.\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2}.12.9.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 27\sqrt{3}$ cm².

3. От свойството на описания четириъгълник следва, че $AB + CD = AD + BC$, откъдето намираме, че $AB + CD = 5 + 7 = 12$ cm.
Периметърът на четириъгълника е 24 cm, а полупериметърът му – $p = 12$.
Тогава $S_{ABCD} = pr = 12.3 = 36$ cm².

4. Лицето на четириъгълника е $S = pr = 45.10 = 450$ m², на вписания кръг – $\pi r^2 = 100\pi \approx 100.3{,}142 = 314{,}2$ m², а на затревената част $450 - 314{,}2 = 135{,}8$ m².

5. Четириъгълникът $ABCD$ е описан и от $AB + CD = AD + BC = \dfrac{P_{ABCD}}{2}$ намираме $BC = 5$ cm и $CD = 2$ cm.
От косинусовата теорема за ΔABD и ΔBCD пресмятаме:
$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos 60^\circ = 49 + 16 - 2.7.4.\dfrac{1}{2} = 37$ и
$\cos\sphericalangle BCD = \dfrac{BC^2 + CD^2 - BD^2}{2BC.CD} = \dfrac{25 + 4 - 37}{2.5.2} = -\dfrac{2}{5}$.
Тогава $\sin\sphericalangle BCD = \sqrt{1 - \cos^2\sphericalangle BCD} = \sqrt{1 - \dfrac{4}{25}} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$.
Лицата на двата триъгълника са: $S_{ABD} = \dfrac{1}{2}AB.AD.\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2}.7.4.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$ cm²;
$S_{BCD} = \dfrac{1}{2}BC.CD.\sin\sphericalangle BCD = \dfrac{1}{2}.5.2.\dfrac{\sqrt{21}}{5} = \sqrt{21}$ cm².
Тогава $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = 7\sqrt{3} + \sqrt{21}$ cm² и $r = \dfrac{S_{ABCD}}{p} = \dfrac{7\sqrt{3} + \sqrt{21}}{9}$ cm.

29. РЕШАВАНЕ НА ЧЕТИРИЪГЪЛНИК. УПРАЖНЕНИЕ

1. От $BC = CD$ и $AC \perp BD$ следва, че AC е симетрала на BD и $\overrightarrow{CA}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle BCD$. Тогава $AD = AB$, ΔABC е равностранен $\left(AD = AB \text{ и } \sphericalangle ADB = 60^\circ\right)$, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ACB = 60^\circ$ и $\sphericalangle ADC = 90^\circ$.

В правоъгълния ΔABC $AD = CD.\text{tg}\,60^\circ = 5\sqrt{3}$ cm и $AC = 2CD = 10$ cm.

Следователно $AB = AD = BD = 5\sqrt{3}$ cm, $AC = 10$ cm и $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD = \dfrac{1}{2}.10.5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$ cm^2.

2. От теоремата на Вариньон следва, че четириъгълникът, чиито върхове са средите на страните на даден четириъгълник, е успоредник.

От условието на задачата следва, че успоредникът е правоъгълник, тъй като диагоналите му са равни. Тогава $d_1 \perp d_2$ и лицето на четириъгълника е $S = \dfrac{1}{2}d_1 d_2$.

3. Отсечките AO и OC лежат на една права и триъгълниците AOD и COD имат общ връх D и обща височина h. Тогава $\dfrac{S_1}{S_3} = \dfrac{\frac{AO.h}{2}}{\frac{OC.h}{2}} = \dfrac{AO}{OC}$. Аналогично намираме, че $\dfrac{S_4}{S_2} = \dfrac{AO}{OC}$. От тези пропорции следва, че $\dfrac{S_1}{S_3} = \dfrac{S_4}{S_2}$ и $S_1 S_2 = S_3 S_4$.

4. 1) Нека $AB \| CD$.

Тогава $S_{ABD} = S_{ABC} \Leftrightarrow S_{AOD} + S_{AOB} = S_{BOC} + S_{AOB} \Leftrightarrow S_{AOD} = S_{BOC}$.

2) Нека $S_{AOD} = S_{BOC}$. Тогава $S_{AOD} + S_{AOB} = S_{BOC} + S_{AOB} \Leftrightarrow \Leftrightarrow S_{ABD} = S_{ABC} \Leftrightarrow \dfrac{AB.h_D}{2} = \dfrac{AB.h_C}{2} \Leftrightarrow h_D = h_C$.

Получихме, че разстоянията от C и D до AB са равни, от което следва, че $AB \| CD$.

5. а) Означаваме $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$ и $\sphericalangle B = \beta$.

Тогава $\sphericalangle D = 180^\circ - \beta$ (свойство на вписан четириъгълник) и $a + c = b + d$ (свойство на описан четириъгълник).

От $S_{ABC} = S_{ACD} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}ab.\sin\beta = \dfrac{1}{2}cd.\sin\left(180^\circ - \beta\right)$ и $\sin\left(180^\circ - \beta\right) = \sin\beta$ следва, че $ab = cd$.

От $a + c = b + d \Leftrightarrow a - b = d - c$, след повдигане в квадрат, получаваме $a^2 + b^2 - 2ab = c^2 + d^2 - 2cd$ и $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, тъй като $ab = cd$.

Верни са и равенствата $a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + d^2 + 2cd \Leftrightarrow \left(a+b\right)^2 = \left(c+d\right)^2$ и а $a + b = c + d$.

Изваждаме почленно равенствата $a + c = b + d$ и $a + b = c + d$ и получаваме $c - b = b - c \Leftrightarrow b = c$. Тогава $a = d$, с което доказахме, че $AB = AD$ и $BC = CD$.

Като вземем предвид, че $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ по III признак (AC е обща страна и $AB = AD$, $BC = CD$), от $\sphericalangle B = \sphericalangle D \Leftrightarrow \beta = 180^\circ - \beta$ следва, че $\beta = 90^\circ$ и $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 90^\circ$.

б) От $\sphericalangle B = 90^\circ$ следва, че $AC = 2R = 4\sqrt{5}$ е диаметър.

Заместваме $AB = 2BC$ в равенството $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Leftrightarrow 5BC^2 = 16.5 \Leftrightarrow BC^2 = 16$ и намираме $BC = 4$ cm, $AB = 8$ cm, $S_{ABC} = \dfrac{AB.BC}{2} = \dfrac{8.4}{2} = 16$ cm^{2}и $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 32$ cm^2.

в) Означаваме $AB = 3x$, $BC = 2x$ и от $S_{ABC} = \dfrac{AB.BC}{2} = \dfrac{3x.2x}{2} = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4$ намираме $x = 2$.

Полупериметърът на четириъгълника е $p = AB + CD = 5x = 10$.

От $S_{ABCD} = pr \iff 2S_{ABC} = pr$ следва, че $r = \dfrac{2S_{ABC}}{p} = \dfrac{2.12}{10} = \dfrac{12}{5}$ cm.

6*. а) От $\sphericalangle COD = \sphericalangle AOB = \varphi$, $\sphericalangle BOC = \sphericalangle AOD = 180° - \varphi$, $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$ и косинусовата теорема за триъгълниците *AOD, BOC, AOB* и *COD* следва, че $AD^2 = AO^2 + DO^2 + 2AO.DO.\cos\varphi$, $BC^2 = BO^2 + AD^2 + 2AO.AD.\cos\varphi$, $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO.BO.\cos\varphi$ и $CD^2 = CO^2 + DO^2 - 2CO.DO.\cos\varphi$.

Тогава $AD^2 + BC^2 - \left(AB^2 + CD^2\right) = 2\left(A\square.D\square + BO.CO + AO.BO + CO.DO\right).\cos\varphi =$

$= 2\left[AO\left(BO + DO\right) + CO\left(BO + DO\right).\right]\cos\varphi = 2\left(AO + CO\right)\left(BO + DO\right)\cos\varphi = 2AC.BD.\cos\varphi$.

б) Ако $AC \perp BD$, то $\varphi = 90°$ и $\cos\varphi = 0$.

Тогава $AD^2 + BC^2 - \left(AB^2 + CD^2\right) = 0$ и $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$.

в) Ако $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$, $AD^2 + BC^2 - \left(AB^2 + CD^2\right) = 0$ и $2AC.BD.\cos\varphi = 0$.

Тогава $\cos\varphi = 0$ и $AC \perp BD$.

30. РЕШАВАНЕ НА ПРАВИЛЕН МНОГОЪГЪЛНИК

2. а) От формулата $R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$ изразяваме $a = 2R.\sin\dfrac{180°}{n}$ и заместваме в равенството

$$S = \frac{na^2}{4}.\mathrm{cotg}\frac{180°}{n} = \frac{n}{4}.\left(2R.\sin\frac{180°}{n}\right)^2 \mathrm{cotg}\frac{180°}{n} = nR^2.\sin^2\frac{180°}{n}.\frac{\cos\dfrac{180°}{n}}{\sin\dfrac{180°}{n}} = = nR^2.\sin\frac{180°}{n}.\cos\frac{180°}{n}.$$

Ако използваме формулата $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$ (вж. Урок 27, зад. 1), получаваме записа $S = \dfrac{nR^2}{2}.\sin\dfrac{360°}{n}$.

б) От формулата $r = \dfrac{a}{2}.\mathrm{cotg}\dfrac{180°}{n}$ изразяваме $a = 2r.\mathrm{tg}\dfrac{180°}{n}$ и заместваме в равенството

$S = \dfrac{na^2}{4}.\mathrm{cotg}\dfrac{180°}{n} = \dfrac{n}{4}.\left(2r.\mathrm{tg}\dfrac{180°}{n}\right)^2 \mathrm{cotg}\dfrac{180°}{n} = nr^2.\mathrm{tg}\dfrac{180°}{n}$ (използвахме, че $\mathrm{tg}\dfrac{180°}{n}.\mathrm{cotg}\dfrac{180°}{n} = 1$).

3. От формулата $\alpha_n = \dfrac{n-2}{n}.180° = 150°$ намираме $\dfrac{n-2}{n} = \dfrac{5}{6}$ и $n = 12$. Периметърът на многоъгълника е $P = na = 12.2 = 24$ cm.

4. Нека *ABCDEF* е правилен шестоъгълник със страна $AB = a$, в който $\sphericalangle ABC = 120°$.
Диагоналите, излизащи от върха *A*, са *AC*, *AD* и *AE*, като $AC = AE$ (следва от $\Delta ABC \cong \Delta AFE$).

От ΔABC намираме $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos 120° = a^2 + a^2 + 2a^2.\dfrac{1}{2} = 3a^2$ $AC = a\sqrt{3}$, а от ΔACD получаваме $AD^2 = AC^2 + CD^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2$ и $AD = 2a$.

Следователно $AC = AE = a\sqrt{3}$, $AD = 2a$.

5. Нека *ABCD* е квадрат, вписан в окръжност *k*, а *M* е средата на дъгата $\overset{\frown}{AB}$. Тогава *A*, *M* и *B* са съседни върхове на правилен осмоъгълник и в ΔAMB $AM = MB = b$, $AB = a$, $\sphericalangle AMB = 135°$ и $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = \dfrac{45°}{2} = 22°30'$.

а) От косинусовата теорема в ΔAMB следва, че

$AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2AM.MB.\cos 135° \iff a^2 = b^2 + b^2 + b^2\sqrt{2} \iff a^2 = b^2\left(2 + \sqrt{2}\right) \iff$

$\iff \dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{1}{2 + \sqrt{2}} = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}$ и $\dfrac{b}{a} = \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}}$.

б) От синусовата теорема за ΔAMB следва, че $\dfrac{a}{\sin 135^\circ} = \dfrac{b}{\sin 22^\circ 30'}$ и

$$\sin 22^\circ 30' = \frac{b.\sin 135^\circ}{a} = \frac{b\sqrt{2}}{2a} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{\cancel{2}}}.\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

31. РЕШАВАНЕ НА РАВНИННИ ФИГУРИ. ТЕМА ЗА САМОКОНТРОЛ

1. Нека успоредникът $ABCD$ със страни $CD = 4$ cm, $AD = 3$ cm и тъп $\sphericalangle ADC = \alpha$ има лице $S = 6\sqrt{3}$ cm^2. Тогава AC е по-големият диагонал.

От $S = CD.AD.\sin\alpha$ намираме $\sin\alpha = \dfrac{S}{CD.AD} = \dfrac{6\sqrt{3}}{4.3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Тогава $\alpha = 120^\circ$, $AC^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD.AD.\cos 120^\circ = 16 + 9 + 2.4.3.\dfrac{1}{2} = 37$ и $AC = \sqrt{37}$ cm (отг. Г).

2. В равнобедрения трапец от $\sphericalangle BOC = \varphi$ следва, че $\sphericalangle BAO = \sphericalangle ABO = \dfrac{\varphi}{2}$.

От правоъгълния ΔBHD изразяваме $BH = h.\text{cotg}\dfrac{\varphi}{2}$.

Като вземем предвид, че $BH = \dfrac{AB + CD}{2}$, получаваме, че $S_{ABCD} = BH.h = h^2\text{cotg}\dfrac{\varphi}{2}$ (отг. Г).

3. Трапецът е равнобедрен, тъй като е вписан в окръжност. Ако $AC \cap BD = O$, от $\sphericalangle BAC = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = 30^\circ$ и $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD$ следва, че $\sphericalangle AOD = 60^\circ$ (външен ъгъл за ΔAOB). Тогава $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}.AC.BD.\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2}.6.6.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ cm^2 (отг. В).

4. От $\overset{\frown}{AD} : \overset{\frown}{DC} : \overset{\frown}{CB} = 1:2:3$ и $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC} + \overset{\frown}{CB} = 180^\circ$ следва, че $\overset{\frown}{BC} = 90^\circ$, $\overset{\frown}{CD} = 60^\circ$ и $\sphericalangle BAC = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = 45^\circ$. Тогава $BC = AB.\sin 45^\circ = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2}$, $\sphericalangle CBD = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CD} = 30^\circ$ $CD = AB.\sin 30^\circ = \dfrac{AB}{2}$ и $AB : BC : CD = 1 : \dfrac{\sqrt{2}}{2} : \dfrac{1}{1} = 2 : \sqrt{2} : 1$ (отг. Г).

5. Нека $ABCDEF$ е правилен шестоъгълник със страна $AB = a$. Диагоналите, излизащи от върха A, са AC, AD и AE, като $AC = AE = 2$ cm и $AD > AC$.

От ΔABC с $\sphericalangle ABC = 120^\circ$ намираме $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos 120^\circ = a^2 + a^2 + 2a^2.\dfrac{1}{2} = 3a^2$ $AC = a\sqrt{3}$ и $a = \dfrac{AC}{\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4$ cm.

Периметърът на многоъгълника е $P = 6a = 24$ cm (отг. Б).

6. От равенството $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$ и $a^2 + b^2 = 13$ намираме, че $d_1^2 + d_2^2 = 26$.

Но $d_1^2 + d_2^2 = (d_1 + d_2)^2 - 2d_1d_2 = 49 - 2d_1d_2 = 26$, от което определяме, че $d_1d_2 = \dfrac{23}{2}$.

Лицето на успоредника е $S = \dfrac{1}{2}d_1d_2.\sin 45^\circ = \dfrac{1}{2}.\dfrac{23}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{23\sqrt{2}}{8}$.

7. През точка C построяваме отсечка $CM \parallel AD$ $(M \in AB)$ и нека h е височината на трапеца.
В успоредника $AMCD$ имаме $AM = CD = 5$ cm и $MC = AD = 13$ cm.

По хероновата формула пресмятаме лицето на ΔMBC със страни $MC = 13$ cm, $MB = 21$ cm и $BC = 20$ cm: $p = 27$ и $S_{MBC} = \sqrt{27(27-20)(27-13)(27-21)} = \sqrt{27.7.14.6} = \sqrt{9^2.7^2.2^2} = 9.7.2$ cm^2.

От $S_{MBC} = \dfrac{MB.h}{2}$ намираме $h = \dfrac{2S_{MBC}}{MB} = \dfrac{2.9.7.2}{21} = 12$ cm.

Следователно $S_{ABCD} = \dfrac{AB+CD}{2}.h = \dfrac{26+5}{2}.12 = 31.6 = 186$ cm^2.

8. Нека окръжността k с център O (O е средата на BC) се допира до бедрото AD в средата му M. Тогава MO е средна основа на трапеца, $MO \parallel AB$ и $MO = \dfrac{AB+CD}{2}$.

От $M \in k$ следва, че $\sphericalangle BMC = 90^\circ$, $BC = \sqrt{MB^2 + MC^2} = \sqrt{64+36} = 10$ cm и $MO = \dfrac{1}{2}BC = 5$ cm.

От $MO \perp AD$ (AD е допирателна на k) и $MO \parallel AB$ (MO е средна основа на трапеца) следва, че $\sphericalangle BAD = 90^\circ$.

От $\sphericalangle MCB = \dfrac{1}{2} \sphericalangle.\overset{\frown}{MB}$ (вписан ъгъл в k) и $\sphericalangle AMB = \dfrac{1}{2} \sphericalangle.\overset{\frown}{MB}$ (периферен ъгъл за k) следва, че $\Delta BMC \sim \Delta BAM$,

$\dfrac{MC}{AM} = \dfrac{BC}{BM} \Leftrightarrow \dfrac{6}{AM} = \dfrac{10}{8}$, $AM = \dfrac{24}{5}$ и $S_{ABCD} = \dfrac{AB+CD}{2}.AD = MO.2AM = 5.\dfrac{48}{5} = 48$ cm^2.

32. ТРИГОНОМЕТРИЧНИТЕ ФУНКЦИИ НА ЪГЛИ ОТ 0° ДО 180° (ПРЕГОВОР)

1. а) От $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ следва, че $\cos\alpha > 0$ и $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Тогава $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\sqrt{2}$.

б) От $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -2$ определяме $\sin\alpha = -2\cos\alpha$ и заместваме в основното тригонометрично тъждество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow 4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow 5\cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Но $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ (II квадрант), cosα < 0 и следователно $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. Тогава $\sin\alpha = -2\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

2. в) От $\cos 170^\circ = \cos(180^\circ - 10^\circ) = -\cos 10^\circ$ следва, че $\cos 10^\circ + \cos 170^\circ = \cos 10^\circ - \cos 10^\circ = 0$ и
$$\frac{\sqrt{2} + \cos 10^\circ + \cos 170^\circ}{4\cos 120^\circ.\sin 135^\circ} = \frac{\sqrt{2}+0}{4\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1.$$

г) $\cos 108^\circ + \cos 72^\circ - \operatorname{cotg} 66^\circ.\operatorname{tg} 114^\circ = \cos(180^\circ - 72^\circ) + \cos 72^\circ + \operatorname{cotg} 66^\circ.\operatorname{tg}(180^\circ - 66^\circ) =$
$= -\cos 72^\circ + \cos 72^\circ - \operatorname{cotg} 66^\circ.\operatorname{tg} 66^\circ = -1$.

3. а) *I* начин. $A = \dfrac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \dfrac{\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 2\right)\cancel{\cos\alpha}}{\left(1 - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\cancel{\cos\alpha}} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + 2}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\dfrac{2}{3} + 2}{1 - \dfrac{2}{3}} = 8$.

II начин. От $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{2}{3}$ следва, че $\sin\alpha = 2x$ и $\cos\alpha = 3x$.

Тогава $A = \dfrac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \dfrac{2x + 2.3x}{3x - 2x} = \dfrac{8x}{x} = 8$.

б) *I* начин. $B = \dfrac{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{4\cos\alpha.\sin\alpha} = \dfrac{\sin^{\cancel{2}}\alpha}{4\cos\alpha.\cancel{\sin\alpha}} + \dfrac{2\cos^{\cancel{2}}\alpha}{4\cancel{\cos\alpha}.\sin\alpha} = \dfrac{1}{4\operatorname{cotg}\alpha} + \dfrac{\operatorname{cotg}\alpha}{2} = = -\dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{17}{24}$.

II начин. $B=\dfrac{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{4\cos\alpha.\sin\alpha}=\dfrac{\dfrac{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}{\dfrac{4\cos\alpha.\sin\alpha}{\sin^2\alpha}}=\dfrac{1+2\text{cotg}^2\alpha}{4\text{cotg}\,\alpha}=\dfrac{1+\dfrac{8}{9}}{-4.\dfrac{2}{3}}=-\dfrac{17}{24}$.

III начин. От $\text{cotg}\,\alpha=-\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\dfrac{2}{3}$ следва, че cosα = 2*x* и sinα = −3*x* (или cosα = −2*x* и sinα = 3*x*).

Тогава $B=\dfrac{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{4\cos\alpha.\sin\alpha}=\dfrac{(-3x)^2+2(2x)^2}{4.2x.(-3x)}=\dfrac{9x^2+8x^2}{-24x^2}=\dfrac{17x^2}{-24x^2}=-\dfrac{17}{24}$.

в) *I* начин. $C=\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{3\sin^2\alpha-2}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\cos^2\alpha}{3\sin^2\alpha-2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}=\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha}=\dfrac{8}{7}$ (вж. Зад.2, урок 32).

II начин. От $\text{tg}\,\alpha\Leftrightarrow\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=3$ изразяваме $\sin\alpha=3\cos\alpha$, заместваме в

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow 9\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow 10\cos^2\alpha=1$ и намираме $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{10}$.

Тогава $\sin^2\alpha=9\cos^2\alpha=\dfrac{9}{10}$ и $D=\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{3\sin^2\alpha-2}=\dfrac{1-\dfrac{2}{10}}{\dfrac{27}{10}-2}=\dfrac{8}{7}$.

33. ОБОБЩЕН ЪГЪЛ. РАДИАН. ТРИГОНОМЕТРИЧНИТЕ ФУНКЦИИ НА ОБОЩЕН ЪГЪЛ.

1. а) За $k=1$ получаваме $\alpha=-45°+1.360°=315°$;
б) За $k=-1$ получаваме $\alpha=-45°-1.360°=-405°$;
в) За $k=2$ получаваме $\alpha=-45°+2.360°=675°$;
г) За $k=-2$ получаваме $\alpha=-45°-2.360°=-765°$.

2. а) $\dfrac{7\pi}{6};\dfrac{5\pi}{4};\dfrac{7\pi}{4};\dfrac{9\pi}{4};\dfrac{5\pi}{2};3\pi;4\pi$;
б) $-\dfrac{\pi}{2};-\pi;-\dfrac{3\pi}{2};-2\pi;-3\pi;-4\pi$.

3. а) 30°, 150°, 210°, 810°, 540°, 1080°, 3600°;
б) −60°, −300°, −420°, −90°, −270°, −1260°, −1620°.

34. ОБОБЩЕН ЪГЪЛ. РАДИАН. ТРИГОНОМЕТРИЧНИТЕ ФУНКЦИИ НА ОБОБЩЕН ЪГЪЛ. УПРАЖНЕНИЕ

1. а) $\sin\dfrac{7\pi}{2}=-1, \cos\dfrac{7\pi}{2}=0$, $\sin 4\pi=0, \cos 4\pi=1$;
б) $\sin\dfrac{9\pi}{2}=\sin\dfrac{\pi}{2}=1,\ \cos\dfrac{9\pi}{2}=\cos\dfrac{\pi}{2}=0,\ \sin\left(-\dfrac{9\pi}{2}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$ и $\cos\left(-\dfrac{9\pi}{2}\right)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

2. а) $-\dfrac{\pi}{4}\pm2k\pi, k\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{7\pi}{4};\dfrac{15\pi}{4}$;
б) $-\dfrac{3\pi}{4}\pm2k\pi, k\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4};\dfrac{13\pi}{4}$;
в) $-\dfrac{\pi}{3}\pm2k\pi, k\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{3};\dfrac{11\pi}{3}$
г) $\dfrac{2\pi}{3}\pm2k\pi, k\in\mathbb{Z}$; $\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{8\pi}{3}$.

3. а) $\dfrac{\pi}{2}$; б) $\dfrac{\pi}{4}$; в) $\dfrac{2\pi}{3}$.

35. ОСНОВНИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ТЪЖДЕСТВА

1. а) I начин. $1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=0 \Leftrightarrow 1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ (Теорема);

II начин. $1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=0 \Leftrightarrow \underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=0 \Leftrightarrow 0=0$;

III начин. $1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=0 \Leftrightarrow \underbrace{1-\sin^2\alpha}_{\cos^2\alpha}-\cos^2\alpha=0 \Leftrightarrow \cos^2\alpha-\cos^2\alpha=0 \Leftrightarrow 0=0$.

б) Да означим лявата страна $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ с A. Тогава

$$A=\frac{1-2\sin^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha}.$$

За да е възможно да съкратим на cosα − sinα, трябва cosα ≠ sinα. По условие $\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}+k\pi \Rightarrow \cos\alpha\neq\sin\alpha$.

Така $A \overset{\alpha\neq\frac{\pi}{4}+k\pi}{=} \dfrac{\cancel{(\cos\alpha-\sin\alpha)}(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cancel{\cos\alpha-\sin\alpha}}=\cos\alpha+\sin\alpha$.

д) Преобразуваме $\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}=\dfrac{1}{|\cos\alpha|}$. От $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ следва, че $\cos\alpha<0\Rightarrow|\cos\alpha|=-\cos\alpha$.

Така окончателно получаваме, че $\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=-\dfrac{1}{\cos\alpha}$.

36. ОСНОВНИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ТЪЖДЕСТВА. УПРАЖНЕНИЕ

1. От $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-3$ определяме $\cos\alpha=-3\sin\alpha$ и заместваме в основното тригонометрично тъждество:

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha+9\sin^2\alpha=1 \Leftrightarrow 10\sin^2\alpha=1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha=\dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \sin\alpha=\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Но $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$ (IVквадрант), sinα < 0 и следователно $\sin\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Тогава $\cos\alpha=-3\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

2. От $\alpha\in\left(\dfrac{5\pi}{2};3\pi\right)$ следва, че cosα < 0.

Тогава $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\dfrac{5}{9}}=-\dfrac{2}{3}$, $\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Следователно $A=2\mathrm{tg}\,\alpha+3\cos\alpha=2\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)+3\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\sqrt{5}-2$.

3. От $\alpha\in\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$ следва, че sinα < 0.

Тогава $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\dfrac{5}{9}}=-\dfrac{2}{3}$, $\mathrm{cotg}\,\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ и

$$A=\left[2.\frac{\sqrt{5}}{2}+3\left(-\frac{2}{3}\right)\right]\left(-\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=-\frac{1}{3}\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)=-\frac{1}{3}.1=-\frac{1}{3}.$$

4. От $\alpha \in \left(3\pi; \frac{7\pi}{2}\right)$ – III квадрант следва, че cosα < 0.

Тогава $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{5}{9}} = -\frac{2}{3}$ и $A = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{tg}\alpha + 9\cos^2\alpha\right).\operatorname{cotg}\alpha =$

$= \frac{2}{\sqrt{5}}\underbrace{\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{cotg}\alpha}_{1} + 9.\frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{9.8.3}{27.\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$.

5. $A = \frac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 2\right)\cancel{\cos\alpha}}{\left(1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\cancel{\cos\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + 2}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{-\frac{2}{3}+2}{1+\frac{2}{3}} = \frac{4}{5}$.

37. ЧЕТНОСТ, НЕЧЕТНОСТ И ПЕРИОДИЧНОСТ НА ТРИГОНОМЕТРИЧНИТЕ ФУНКЦИИ

1. а) От $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = -(-1) = 1$, $\operatorname{tg}13\pi = \operatorname{tg}0 = 0$ и $\operatorname{cotg}\left(15\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{cotg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = = -\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$ следва, че $A = 1 - 0 - \sqrt{3} = 1 - \sqrt{3}$.

б) От $\operatorname{cotg}\left(-\frac{23\pi}{4}\right) = \operatorname{cotg}\left(-5\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{cotg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\operatorname{cotg}\frac{3\pi}{4} = -(-1) = 1$, $\operatorname{tg}\frac{37\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(9\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$

и $\sin\frac{47\pi}{6} = \sin\left(8\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ следва, че $B = 1 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

38. ЧЕТНОСТ, НЕЧЕТНОСТ И ПЕРИОДИЧНОСТ НА ТРИГОНОМЕТРИЧНИТЕ ФУНКЦИИ. УПРАЖНЕНИЕ

1. $\cos390° - \sin210° = \cos(360° + 30°) - \sin(180° + 30°) = \cos30° + \sin30° = = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (отг. Г).

2. При $\alpha = \frac{25\pi}{6}$: $\frac{\sin\alpha}{\operatorname{cotg}3\alpha - \cos2\alpha} = \frac{\sin\frac{25\pi}{6}}{\operatorname{cotg}\frac{25\pi}{2} - \cos\frac{25\pi}{3}} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{0 - \frac{1}{2}} = -1$ (отг. Б).

4. $\cos330° - \sin510° = \cos(360° - 30°) - \sin(360° + 150°) = \cos(-30°) - \sin150° =$

$= \cos30° - \sin150° = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (отг. В).

5. $\cos(90° + \alpha) + \sin(180° - \alpha) + \sin^2 80° + \cos^2 80° - 1 = -\sin\alpha + \sin\alpha + 1 - 1 = 0$ (отг. В).

6. $\sin\left(\alpha + \frac{9\pi}{2}\right) + \cos(18\pi - \alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + 4\pi\right) + \cos(-\alpha) = = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\alpha = \cos\alpha + \cos\alpha = 2\cos\alpha$;

40. ГРАФИКИ НА ТРИГОНОМЕТРИЧНИТЕ ФУНКЦИИ *Y = TG X* И *Y = COTG X*

3. а) Преобразуваме: $a = \operatorname{tg}410° = \operatorname{tg}(2.180° + 50°) = \operatorname{tg}50°$ и $b = \operatorname{tg}569° = \operatorname{tg}(3.180° + 29°) = \operatorname{tg}29°$. Функцията tg*x* расте, ъглите са в интервала $(-90°; 90°)$ и от $29° < 50°$ следва, че tg29° < tg50°, т.е. *b* < *a*.

б) Преобразуваме: $a=\operatorname{cotg}422^\circ=\operatorname{cotg}(2.180^\circ+62^\circ)=\operatorname{cotg}62^\circ$ и $b=\operatorname{cotg}579^\circ=$
$=\operatorname{cotg}(3.180^\circ+39^\circ)=\operatorname{cotg}39^\circ$.

Функцията $\operatorname{cotg}x$ намалява, ъглите са в интервала $(0^\circ;\ 180^\circ)$ и от $39^\circ<62^\circ$ следва, че $\operatorname{cotg}39^\circ>\operatorname{cotg}62^\circ$, т.е. $b>a$.

в) Преобразуваме: $a=\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $b=\operatorname{tg}\frac{8\pi}{7}=\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$,

$c=\operatorname{tg}\frac{13\pi}{7}=\operatorname{tg}\left(2\pi-\frac{\pi}{7}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$.

Функцията $y=\operatorname{tg}x$ е растяща и от $-\frac{\pi}{4}<-\frac{\pi}{7}<\frac{\pi}{7}$ (числата са в интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$) следва, че

$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)<\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)<\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$ или $a<c<b$.

41. ФОРМУЛИ ЗА СИНУС И КОСИНУС ОТ СБОР И РАЗЛИКА НА ДВА ЪГЪЛА

1. а) $\sin 2\alpha.\cos 4\alpha+\cos 2\alpha.\sin 4\alpha=\sin(2\alpha+4\alpha)=\sin 6\alpha=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

б) $\cos\frac{\alpha}{2}.\cos 40^\circ-\sin\frac{\alpha}{2}.\sin 40^\circ=\cos\left(\frac{\alpha}{2}+40^\circ\right)=\cos\left(\frac{10^\circ}{2}+40^\circ\right)=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Пресмятаме $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ и $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}==\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{3}.\frac{1}{3}-\frac{2}{3}.\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{5}-4\sqrt{2}}{9}$.

От $\cos\gamma=\cos[180^\circ-(\alpha+\beta)]=-\cos(\alpha+\beta)=\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{9}$ следва, че $\cos\gamma>0$, $\gamma<90^\circ$ и ΔABC е остроъгълен.

3. От $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\alpha\in\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$ и $\cos\beta=\frac{5}{12}$, $\beta\in\left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$ намираме $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$

и $\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\frac{25}{169}}=-\frac{12}{13}$.

Тогава $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta=-\frac{4}{5}.\frac{5}{13}-\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{20}{65}-\frac{36}{65}=-\frac{56}{65}$.

42. ФОРМУЛИ ЗА СИНУС И КОСИНУС ОТ СБОР И РАЗЛИКА НА ДВА ЪГЪЛА. УПРАЖНЕНИЕ

1. От $x\in\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$ следва, че $\cos x<0$ и $\cos x=-\sqrt{1-\sin^2 x}=-\sqrt{1-\frac{25}{169}}==-\sqrt{\frac{144}{169}}=-\frac{12}{13}$. Тогава

$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x.\cos\frac{\pi}{3}+\sin x.\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{12}{13}.\frac{1}{2}-\frac{5}{13}.\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{12+5\sqrt{3}}{26}$.

2. От $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\alpha\in\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$ и $\cos\beta=\frac{5}{12}$, $\beta\in\left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$ намираме $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$

и $\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\frac{25}{169}}=-\frac{12}{13}$.

Тогава

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha.\cos\beta-\cos\alpha.\sin\beta=-\frac{3}{5}.\frac{5}{13}-\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{15}{65}-\frac{48}{65}=-\frac{63}{65}.$$

3. а) $A=\sin\alpha-\sqrt{3}.\cos\alpha=2\left(\sin\alpha.\frac{1}{2}-\cos\alpha.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\sin\alpha.\cos\frac{\pi}{3}-\cos\alpha.\sin\frac{\pi}{3}\right)==2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right).$

б) При $x\in\mathbb{R}$ следва, че $-1\le\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le1\Leftrightarrow-2\le2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le2$.

Получихме, че $-2\le y\le2$ и следователно $y_{\min}=-2$.

4. а) Имаме

$$y=3\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sqrt{3}\left(\sin x.\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x.\frac{1}{2}\right)=$$

$$=2\sqrt{3}\left(\sin x.\cos\frac{\pi}{6}+\cos x.\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}.\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$$

б) При $x\in\mathbb{R}$ следва, че

$$-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le1\ \Leftrightarrow\ -2\sqrt{3}\le2\sqrt{3}.\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le2\sqrt{3}.$$

Получихме, че $-2\sqrt{3}\le y\le2\sqrt{3}$ и следователно $y_{\max}=2\sqrt{3}$.

5. Пресмятаме $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\pm\sqrt{1-\sin^2\beta}==\pm\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\pm\frac{3}{5}$ и

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta=\frac{4}{5}.\left(\pm\frac{3}{5}\right)-\frac{3}{5}.\frac{4}{5}.$$

Ако $\cos\beta=\frac{3}{5}$, то $\cos(\alpha+\beta)=\frac{12}{25}-\frac{12}{25}=0$, $\alpha+\beta=90^\circ=\gamma$ и ΔABC е правоъгълен.

Ако $\cos\beta=-\frac{3}{5}$, то $\beta>90^\circ$ и ΔABC е тъпоъгълен.

43. ФОРМУЛИ ЗА ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС ОТ СБОР И РАЗЛИКА НА ДВА ЪГЛА

1. а) $\operatorname{tg}\frac{19\pi}{12}=\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{7\pi}{12}\right)=\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}.\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}.1}=-\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=-\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{3-1}=-\frac{3+2\sqrt{3}+1}{2}=-\left(2+\sqrt{3}\right)=-2-\sqrt{3};$$

б) $\dfrac{\operatorname{tg}63^\circ-\operatorname{cotg}72^\circ}{1+\operatorname{cotg}27^\circ.\operatorname{tg}18^\circ}=\dfrac{\operatorname{tg}63^\circ-\operatorname{cotg}(90^\circ-18^\circ)}{1+\operatorname{cotg}(90^\circ-63^\circ).\operatorname{tg}18^\circ}=\dfrac{\operatorname{tg}63^\circ-\operatorname{tg}18^\circ}{1+\operatorname{tg}63^\circ.\operatorname{tg}18^\circ}==\operatorname{tg}(63^\circ-18^\circ)=\operatorname{tg}45^\circ=1;$

в) $\operatorname{cotg}\frac{25\pi}{12}=\operatorname{cotg}\left(2\pi+\frac{\pi}{12}\right)=\operatorname{cotg}\frac{\pi}{12}=\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{3}.\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4}+1}{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{cotg}\frac{\pi}{3}}=$

$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}.1+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{9-3}=\frac{9+6\sqrt{3}+3}{6}=2+\sqrt{3}$;

г) От $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ следва, че $\operatorname{cotg}x<0$. От $1+\operatorname{cotg}^2x=\frac{1}{\sin^2x}=\frac{13}{9}$ намираме $\operatorname{cotg}^2x=\frac{4}{9}$ и $\operatorname{cotg}x=-\frac{2}{3}$.

Тогава $\operatorname{cotg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{cotg}x.\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4}-1}{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{cotg}x}=\frac{-\frac{2}{3}.1-1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{-\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}}=-5$;

д) $\operatorname{tg}75^\circ-\operatorname{cotg}75^\circ=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{4\sqrt{3}}{3-1}=2\sqrt{3}$.

44. ФОРМУЛИ ЗА ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ФУНКЦИИ ОТ УДВОЕН ЪГЪЛ

1. От $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\alpha\in(270^\circ;\,360^\circ)$ намираме $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$. Тогава

$\sin2\alpha=2\sin\alpha.\cos\alpha=2\left(-\frac{4}{5}\right)\frac{3}{5}=-\frac{24}{25}$, $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{9}{25}-\frac{16}{25}=-\frac{7}{25}$.

2. От $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ следва, че $\frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ и $\sin\frac{\alpha}{2}>0$, $\cos\frac{\alpha}{2}>0$. Тогава $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1+\frac{1}{3}}{2}=\frac{2}{3}$ и

$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{1-\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{3}$, откъдето $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. От $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$ следва, че $\frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{3\pi}{4};\pi\right)$ и $\sin\frac{\alpha}{2}>0$, $\cos\frac{\alpha}{2}<0$. От $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1-\frac{5}{13}}{2}=\frac{4}{13}$ и

$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{1+\frac{5}{13}}{2}=\frac{9}{13}$ намираме:

$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{4}{13}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{9}{13}}=-\frac{3}{\sqrt{13}}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=-\frac{2}{3}$.

4. От $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\alpha\in(270^\circ;\,360^\circ)$ намираме $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$.

Пресмятаме $\sin2\alpha=2\sin\alpha.\cos\alpha=2\left(-\frac{4}{5}\right)\frac{3}{5}=-\frac{24}{25}$, $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{9}{25}-\frac{16}{25}=-\frac{7}{25}$ и

$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=\frac{7}{24}$. Тогава $\operatorname{tg}\frac{\pi+4\alpha}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=-\operatorname{cotg}2\alpha=-\frac{7}{24}$.

45. ФОРМУЛИ ЗА ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ФУНКЦИИ ОТ УДВОЕН ЪГЪЛ. УПРАЖНЕНИЕ

1. а) $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{2.2}{1-4} = -\dfrac{4}{3}$.

б) От $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ следва, че $\dfrac{\alpha}{2} \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{4}\right)$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} < 0$. Означаваме $x = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, $x < 0$ и от

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow 2 = \dfrac{2x}{1-x^2} \Leftrightarrow 1 = \dfrac{x}{1-x^2}$ получаваме $x^2 + x - 1 = 0$ с корени $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$,

като решение е само $x = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Следователно $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. *I* начин. $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 1 + \cos 2\alpha - \cos 2\alpha = 1$ (отг. Г).

II начин. При $\alpha = 30°$ числената стойност на дадения израз е $2\cos^2 30° - \cos 60° = 2.\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2} = 1$ – посочената в Г) стойност (стойностите в А) и Б) са съответно $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\dfrac{1}{2}$). Отговорът на задачата е Г).

4. *I* начин. $\operatorname{tg}15° + \operatorname{cotg}15° = \dfrac{\sin 15°}{\cos 15°} + \dfrac{\cos 15°}{\sin 15°} = \dfrac{\sin^2 15° + \cos^2 15°}{\sin 15°.\cos 15°} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}\sin 30°} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}} = 4$.

II начин. От $\operatorname{tg}15° = \operatorname{tg}(60° - 45°) = \dfrac{\operatorname{tg}60° - \operatorname{tg}45°}{1 + \operatorname{tg}60°.\operatorname{tg}45°} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$ следва, че $\operatorname{tg}15° + \operatorname{cotg}15° =$

$= \operatorname{tg}15° + \dfrac{1}{\operatorname{tg}15°} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} + \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2 + \left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2} = 4$.

5. От $AB = 2R$ следва, че $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90°$ и от правоъгълните триъгълници ABC и ABD изразяваме $BC = AB.\cos\beta = 2R\cos\beta$ и $AD = AB.\cos\alpha = 2R\cos\alpha$.

От синусовата теорема за ΔACD имаме $CD = 2R\sin\sphericalangle CAD$.

Но $\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAD - \sphericalangle BAC = \alpha - (90° - \beta) = \alpha + \beta - 90°$ и

$\sin\sphericalangle CAD = \sin(\alpha + \beta - 90°) = -\sin\left[90° - (\alpha + \beta)\right] = -\cos(\alpha + \beta)$.

За периметъра на $ABCD$ намираме:

$P = AB + AD + BC + CD = 2R + 2R\cos\alpha + 2R\cos\beta - 2R\cos(\alpha + \beta) = 2R\left[1 + \cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha + \beta)\right]$.

46. ФОРМУЛИ ЗА СБОР И ПРОИЗВЕДЕНИЕ НА ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ФУНКЦИИ

2. а) $4\sin(\alpha + 30°).\cos(\alpha - 30°) - \sqrt{3} \overset{(5)}{=} 4.\dfrac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 60°) - \sqrt{3} =$

$= 2\left(\sin 2\alpha + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt{3} = 2\sin 2\alpha + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sin 2\alpha$;

б) $\sin 2\alpha + 2\sin\left(\dfrac{\pi}{12} - \alpha\right).\cos\left(\dfrac{\pi}{12} + \alpha\right) \overset{(5)}{=} \sin 2\alpha + 2.\dfrac{1}{2}\left[\sin\dfrac{\pi}{6} + \sin(-2\alpha)\right] = \sin 2\alpha + \dfrac{1}{2} - \sin 2\alpha = \dfrac{1}{2}$;

в) Преобразуваме лявата страна на равенството:

$\dfrac{\cos 2\alpha + \cos 5\alpha + \cos\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin\alpha} = \dfrac{\cos 2\alpha + 2\cos 3\alpha.\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + 2\sin 2\alpha.\cos 3\alpha} = \dfrac{\cos 2\alpha(1 + 2\cos 3\alpha)}{\sin 2\alpha(1 + 2\cos 3\alpha)} = \operatorname{cotg} 2\alpha$;

3. а) $2\cos 50^\circ.\cos 70^\circ - \sin 110^\circ \overset{(6)}{=} \cos 120^\circ + \cos 20^\circ - \sin 110^\circ = -\frac{1}{2} + \cos 20^\circ - \cos 20^\circ = -\frac{1}{2}$;

б) $2\cos 110^\circ.\cos 10^\circ + \sin 10^\circ \overset{(6)}{=} 2.\frac{1}{2}\left(\cos 120^\circ + \cos 100^\circ\right) + \sin 10^\circ =$

$= \cos 120^\circ + \cos 100^\circ + \sin 10^\circ = -\frac{1}{2} - \sin 10^\circ + \sin 10^\circ = -\frac{1}{2}$.

47. ФОРМУЛИ ЗА СБОР И ПРОИЗВЕДЕНИЕ НА ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ФУНКЦИИ. УПРАЖНЕНИЕ

1. а) $\sin\alpha - \cos\alpha = \sin\alpha - \sin\left(90^\circ - \alpha\right) \overset{(2)}{=} 2\sin\frac{\alpha - \left(90^\circ - \alpha\right)}{2}\cos\frac{\alpha + 90^\circ - \alpha}{2} =$

$= 2\sin\left(\alpha - 45^\circ\right).\cos 45^\circ = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - 45^\circ\right)$;

б) $\underbrace{\sin 2\alpha}_{2\sin\alpha.\cos\alpha} + \sqrt{3}\sin\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha = 2\sin\alpha.\left(\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= 2\sin\alpha.\left(\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{6}\right) \overset{(3)}{=} 4\sin\alpha.\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12}\right).\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12}\right)$;

2. Означаваме $A = \frac{\cos 5\alpha - \cos 7\alpha + \cos\alpha - \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha - \sin\alpha + \sin 5\alpha - \sin 7\alpha}$ и преобразуваме:

$\cos 5\alpha - \cos 7\alpha = 2\sin\frac{5\alpha + 7\alpha}{2}.\sin\frac{7\alpha - 5\alpha}{2} = 2\sin 6\alpha.\sin\alpha$;

$\cos\alpha - \cos 3\alpha = 2\sin\frac{\alpha + 3\alpha}{2}.\sin\frac{3\alpha - \alpha}{2} = 2\sin 2\alpha.\sin\alpha$;

$\sin 3\alpha - \sin\alpha = 2\sin\frac{3\alpha - \alpha}{2}.\cos\frac{3\alpha + \alpha}{2} = 2\sin\alpha.\cos 2\alpha$;

$\sin 5\alpha - \sin 7\alpha = 2\sin\frac{5\alpha - 7\alpha}{2}.\cos\frac{5\alpha + 7\alpha}{2} = 2\sin\left(-\alpha\right).\cos 6\alpha = -2\sin\alpha.\cos 6\alpha$.

Тогава $A = \frac{2\sin 6\alpha.\sin\alpha + 2\sin 2\alpha.\sin\alpha}{2\sin\alpha.\cos 2\alpha - 2\sin\alpha.\cos 6\alpha} = \frac{\cancel{2\sin\alpha}.\left(\sin 6\alpha + \sin 2\alpha\right)}{\cancel{2\sin\alpha}.\left(\cos 2\alpha - \cos 6\alpha\right)} = \frac{\sin 6\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 6\alpha} =$

$= \frac{2\sin\frac{6\alpha + 2\alpha}{2}.\cos\frac{6\alpha - 2\alpha}{2}}{2\sin\frac{2\alpha + 6\alpha}{2}.\sin\frac{6\alpha - 2\alpha}{2}} = \frac{\cancel{2\sin 4\alpha}.\cos 2\alpha}{\cancel{2\sin 4\alpha}.\sin 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\sin\alpha.\cos\alpha} =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^{\cancel{2}}\alpha}{\sin\alpha.\cancel{\cos\alpha}} - \frac{\sin^{\cancel{2}}\alpha}{\cancel{\sin\alpha}.\cos\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha\right)$. С това тъждеството е доказано.

3. За ъглите α, β и γ в триъгълника е в сила $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Преобразуваме лявата страна на равенството:

$\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}.\cos\frac{\alpha - \beta}{2} - \sin\left[\pi - \left(\alpha + \beta\right)\right] =$

$= 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}.\cos\frac{\alpha - \beta}{2} - \sin\left(\alpha + \beta\right) = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}.\cos\frac{\alpha - \beta}{2} - 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}.\cos\frac{\alpha + \beta}{2} =$

$= 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}.\left(\cos\frac{\alpha - \beta}{2} - \cos\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi - \gamma}{2}.2\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2} =$

$=4\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2}.\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)=4\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2}.\cos\frac{\gamma}{2}$. С това тъждеството е доказано.

б) За ъглите α, β и γ в триъгълника е в сила α + β + γ = π.

Преобразуваме лявата страна на равенството:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\left[\pi-(\alpha+\beta)\right]=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin(\alpha+\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2\sin\frac{\pi-\gamma}{2}.2\cos\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\beta}{2}=$$

$$=4\cos\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\beta}{2}.\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)=4\cos\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\beta}{2}.\cos\frac{\gamma}{2}.$$

С това тъждеството е доказано.

в) От $\alpha+\beta+\gamma=\pi \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}$ може да запишем:

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}}.$$

Тогава $\operatorname{cotg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}-1}{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}}=\frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}=\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}-1\right)\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}.\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}.$$

49. ВЕРОЯТНОСТ. КЛАСИЧЕСКА ВЕРОЯТНОСТ

2. При хвърляне на два зара има 36 възможни изхода.

а) Благоприятните изходи са (5; 6) и (6; 5) и вероятността е $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

б) Благоприятните изходи са (1; 3), (2; 2), (2; 6), (3; 1), (3, 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2) и (6; 6) и вероятността е $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.

в) Благоприятните изходи са (1; 1), (1; 2), (1; 4), (1; 7), (2, 1), (2; 3), (2; 5), (3; 2), (3; 4), (4; 1), (4; 3), (5; 2), (5; 6), (6; 1) и (6; 5) и вероятността е $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$.

4. От кутия с 4 сини и 7 зелени топки последователно се изваждат по случаен начин 2 топки. Намерете вероятността:

а) Вероятността първата топка да е зелена е $\frac{7}{11}$.

б) Вероятността двете топки да са сини е $\frac{C_4^2}{C_{11}^2}=\frac{6}{55}$.

в) Вероятността двете топки да са зелени е $\frac{C_7^2}{C_{11}^2}=\frac{21}{55}$.

г) Вероятността да има една синя и една зелена топка $1-\left(\frac{6}{55}+\frac{21}{55}\right)=\frac{28}{55}$.

5. Има 6 възможни подреждания на A, B и C на пейката и при две от тях A и C НЕ са седнали един до друг. Търсената вероятност е $\frac{6-2}{6}=\frac{2}{3}$.

7. Всички ученици са 52.

а) Вероятността да е избрано момче от 11[а] е $\frac{14}{52}=\frac{7}{26}$.

б) Вероятността да е избрано момиче е $\frac{12+13}{52}=\frac{25}{52}$;

в) Вероятността да не е избран ученик от 11[б] е $\frac{12+14}{52}=\frac{1}{2}$.

8. След изваждане на учебника по биология, в чантата има учебници по математика, физика и химия. Вероятността вторият изваден учебник да е по математика е $\frac{1}{3}$.

50. УСЛОВНА ВЕРОЯТНОСТ. ТЕОРЕМА ЗА УМНОЖЕНИЕ НА ВЕРОЯТНОСТИ. НЕЗАВИСИМОСТ

4. От кутия с 5 бели и 11 червени топки последователно са извадени 2 топки (първата топка не се връща в кутията). Намерете вероятността:

а) Вероятността първата топка да е червена, а втората – бяла, е равна на $\frac{11}{16}\cdot\frac{5}{15}=\frac{11}{48}$.

б) Вероятността двете топки да са едноцветни е $\frac{11}{16}\cdot\frac{10}{15}+\frac{5}{16}\cdot\frac{4}{15}=\frac{13}{24}$.

в) Вероятността първата извадена топка да е бяла, а втората да е червена, е $\frac{11}{48}$, а вероятността двете да са с различен цвят е $1-\frac{13}{24}=\frac{11}{24}$. Търсената условна вероятност е $\frac{11}{48}:\frac{11}{24}=\frac{1}{2}$.

5. Вероятността сборът от номерата на двата въпроса да е 30 е равна на $\frac{6}{10.15}=\frac{1}{25}$.

а) Вероятността първият въпрос да е номер 9, а вторият да е номер 21, е $\frac{1}{10.15}=\frac{1}{150}$. Търсената условна вероятност е равна на $\frac{1}{150}:\frac{1}{25}=\frac{1}{6}$.

б) При даденото условие вторият въпрос е с номер 20, 21, 22, 23, 24 или 25, а първият съответно 10, 9, 8, 7, 6, 5. Вероятността вторият въпрос да е с номер, по-голям от 18, е равна на 1.

6. Вероятността сборът на точките на двата зара е по-малък от 8 е $\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$. Вероятността на втория зар да се е паднало 4, а на първия 1, 2 или 3, е $\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{12}$. Търсената условна веротност е равна на $\frac{1}{12}:\frac{7}{12}=\frac{1}{7}$.

7*. Вероятността партидата да не се бракува е вероятността при избор на 3 изделия и трите да са изправни, т.е. $\frac{19}{21}\cdot\frac{18}{20}\cdot\frac{17}{19}=\frac{51}{70}$. Вероятността партидата да се бракува е $1-\frac{51}{70}=\frac{19}{70}$.

51. УСЛОВНА ВЕРОЯТНОСТ. ТЕОРЕМА ЗА УМНОЖЕНИЕ НА ВЕРОЯТНОСТИ. НЕЗАВИСИМОСТ. УПРАЖНЕНИЕ

3. а) Вероятността втората извадена тетрадка да е по математика, ако първата извадена е по физика, е $\frac{1}{4}$.

б) Вероятността третата извадена тетрадка да е по математика, ако първата извадена е по физика, е $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$.

4. Момчетата са $\frac{3}{5}\cdot 25=15$, а момичетата са 10.

5. Вероятността на двата зара да има равен брой точки, ако сборът на точките е поне 5, е равна на $\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$.

6. Вероятността точките върху двата зара да са различни е $\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$. Вероятността точките да са различни и сборът им да е равен на 8, е $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$. Търсената условна вероятност е $\frac{1}{9}:\frac{5}{6}=\frac{2}{15}$.

7. а) Сборът и произведението на двете числа имат една и съща четност, точно когато и двете са четни. Търсената вероятност е $\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{7}$.

б) Ако произведението е нечетно, двете числа са нечетни и сборът им е четен. Търсената условна вероятност е 1.

в) Ако сборът е нечетен, числата са с различна черност и следователно произведението им е четно. Търсената условна вероятност е 1.

8. Вероятността вероятността втората топка да е синя, при условие, че първата топка е червена, е $\frac{n}{n+4}=\frac{1}{3}$. Следователно $n=2$.

52. МОДЕЛИ НА МНОГОКРАТНИ ЕКСПЕРИМЕНТИ С ДВА ВЪЗМОЖНИ ИЗХОДА

1. а) Вероятността да се паднат точно 2 шестици е $C_7^2.\left(\frac{1}{6}\right)^2.\left(\frac{5}{6}\right)^5$.

б) Вероятността да се паднат точно 6 петици е $C_7^1.\left(\frac{1}{6}\right)^6.\left(\frac{5}{6}\right)$;

в) Вероятността да се паднат точно две нечетни числа е $C_7^2.\left(\frac{3}{6}\right)^2.\left(\frac{3}{6}\right)^5=\frac{21}{128}$.

г) Вероятността да се паднат 3 четни и 4 нечетни числа е $C_7^3.\left(\frac{1}{2}\right)^3.\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{35}{128}$.

д) Вероятността да се паднат точно 5 числа, по-големи от 3, е $C_7^2.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{21}{128}$.

2. а) Вероятността сред 5 деца да има точно 3 момчета е $C_5^3.\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{16}$

б) Вероятността сред 5 деца да има 5 момичета е $\frac{1}{32}$.

3. Вероятността е $C_{13}^{10}.\left(\frac{1}{10}\right)^{10}.\left(\frac{9}{10}\right)^3=286.\frac{9^3}{10^{13}}$.

6*. Вероятността да вкара точно k коша от 10 изстрела е $C_{10}^k.\left(\frac{4}{5}\right)^k.\left(\frac{1}{5}\right)^{10-k}=\frac{10!}{k!(10-k)!}.\frac{4^k}{5^{10}}$.

Тази вероятност е най-голяма при $k=8$.

53. МОДЕЛИ НА МНОГОКРАТНИ ЕКСПЕРИМЕНТИ С ДВА ВЪЗМОЖНИ ИЗХОДА. УПРАЖНЕНИЕ

5. Вероятността да вали в понеделник и в три от останалите 6 дни е $p=0,2\ .\ C_6^3\ .\ 0,2^3\ .\ 0,8^3\approx 0,016$.

6*. а) Вероятността да се извадят две едноцветни топки е $\frac{C_5^2+C_3^2}{C_8^2}=\frac{13}{28}$. Вероятността 3 пъти да са извадени топки с еднакъв цвят е $C_6^3.\left(\frac{13}{28}\right)^3\left(\frac{15}{28}\right)^3$.

б) Вероятността 2 пъти да са извадени топки с различен цвят е $C_6^2.\left(\frac{13}{28}\right)^4\left(\frac{15}{28}\right)^2$.

в) Вероятността поне веднъж да са извадени едноцветни топки е $1-\left(\frac{15}{28}\right)^6$.

54. РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ НА ВЕРОЯТНОСТИТЕ СЪС СУМА 1

3. Вероятността да се избере момче от клас с 26 ученици е с $\frac{7}{13}$, а вероятността да се избере момиче е $\frac{6}{13}$. Момчетата в класа са 14.

4. При хвърляне на неправилен зар четно число се пада с вероятност $\frac{2}{3}$, а нечетно с вероятност $\frac{1}{3}$. Вероятността при 8 хвърляния на зара да се паднат 3 нечетни числа е $C_8^3.\left(\frac{1}{3}\right)^3.\left(\frac{2}{3}\right)^5\approx 0,273$.

5. При хвърляне на неправилна монета вероятността да се падне ези е $\frac{3}{4}$, а вероятността да се падне тура е $\frac{1}{4}$. Вероятността при 7 хвърляния на монетата да се падне 5 пъти ези е $C_7^2.\left(\frac{1}{4}\right)^2.\left(\frac{3}{4}\right)^5\approx 0,311$.

55. РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ НА ВЕРОЯТНОСТИТЕ СЪС СУМА 1. УПРАЖНЕНИЕ

1. Тъй като $x^2+x+\frac{1}{4}=1$, то $x=0{,}5$.

2. Вероятността произволно избран ученик от един клас да има 6 по математика е $\frac{1}{13}$, а ако вероятностите ученикът да има 5, 4 , 3 или 2 са равни на x, то $4x+\frac{1}{13}=1$. Следователно $x=\frac{3}{13}$. Вероятността ученикът да има 5 или 6 е $\frac{3}{13}+\frac{1}{13}=\frac{4}{13}$.

3. При хвърляне на неправилен зар вероятността да се падне число 1, 2, 3, 4, 5, 6 е съответно равна на k, $2k$, $3k$, $4k$, $5k$, $6k$. Тъй като $k+2k+3k+4k+5k+6k=1$, то $k=\frac{1}{21}$.

4. В кутия са поставени 10 зелени, 8 червени и x сини топки. Вероятността случайно избрана топка да е зелена е $\frac{10}{18+x}$ и е с $\frac{1}{20}$ повече от вероятността случайно избрана топка да е червена, която е равна на $\frac{8}{18+x}$. Следователно $\frac{2}{18+x}=\frac{1}{20}$ и сините топки са 22.

56. ГЕОМЕТРИЧНА ВЕРОЯТНОСТ ВЪРХУ ПРАВАТА КАТО ОТНОШЕНИЕ НА ДЪЛЖИНИ НА ИНТЕРВАЛИ

4. Триъгълник със страни 8 cm, 15 cm и x cm съществува, точно когато $7<x<23$. Търсената вероятност е равна на $\frac{23-7}{38-4}=\frac{8}{17}$.

5. Да разгледаме събитията $B=\{PX<QX\}$ и $A=\{QX<\frac{3}{4}PQ\}$. Имаме $P(B)=0{,}5$ и $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$. Тогава $P(A/B)=\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

57. ГЕОМЕТРИЧНА ВЕРОЯТНОСТ ВЪРХУ ПРАВАТА КАТО ОТНОШЕНИЕ НА ДЪЛЖИНИ НА ИНТЕРВАЛИ. УПРАЖНЕНИЕ

2. а) Решенията на неравенството $x^2 + 5x + 6 < 0$ са $x \in (-3;-2)$. Търсената вероятност е $\frac{1}{25}$.

б) Решенията на неравенството $x^2 - 7x - 7 > 0$ са $x \in (-1;7)$. Търсената вероятност е $\frac{8}{25}$.

3. а) Лицето на ΔAYC е по-голямо от 5 cm^2 точно когато $2AY > AB$. Търсената вероятност е равна на 0,5.

б) Лицето на ΔBYC е по-голямо от 5 cm^2 и по-малко от 8 cm^2 точно когато $\frac{1}{2}AB < BY < \frac{4}{5}AB$. Търсената вероятност е равна на 0,3.

4. Остроъгълен триъгълник със страни 12 cm, 15 cm и x cm съществува точно когато $x^2 < 12^2 + 15^2$ и $15^2 < x^2 + 12^2$. В интервала (0; 18) тези условия са изпълнени за подинтервала (9; 18), т.е. с вероятност 0,5.

5*. а) Числата x, $23 - x$ и 17 са страни на триъгълник при $20 > x > 3$. Търсената вероятност е $\frac{17}{23}$.

б) Числата x, $23 - x$ и 17 са страни на тъпоъгълен триъгълник с най-голяма страна 17 cm при $17^2 > x^2 + (23 - x)^2$, т.е. $15 > x > 8$ Търсената вероятност е $\frac{7}{23}$.

6*. Нека точките P и Q върху BC са такива, че $AP = 5$ cm и $DQ = 5$ cm. Тогава $BP = CQ = 3$ cm, $PQ = 2$ cm. По-дългата от отсечките AX и BX е по-малка от 5 cm точно когато X лежи на отсечката PQ. Търсената вероятност е равна на $\frac{PQ}{BC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

58. ГЕОМЕТРИЧНА ВЕРОЯТНОСТ В РАВНИНАТА КАТО ОТНОШЕНИЕ НА ЛИЦА

2. Търсената вероятност е равна на $\frac{2r^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi}$.

4. Точка X се намира в триъгълника MNC, където $MN \| AB$ е средна отсечка в триъгълника. Търсената вероятност е равна на $\frac{S_{MNC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}$.

5. Търсената вероятност е равна на $\dfrac{\pi r^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2}{\pi r^2} = 1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

59. ГЕОМЕТРИЧНА ВЕРОЯТНОСТ В РАВНИНАТА КАТО ОТНОШЕНИЕ НА ЛИЦА. УПРАЖНЕНИЕ

3. а) Вероятността е $\frac{16 - 4\pi}{16} = 1 - \frac{\pi}{4}$.

б) Тъй като разстоянието от центъра на квадрата до негов връх е $2\sqrt{2} < 3$, търсената вероятност е 0.

4. Имаме $r^2 = 2(1 - r^2) \Rightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

6. Вероятността да се извади червена топка е $\frac{a}{a+b}$ и е с $\frac{1}{3}$ по-голяма от вероятността да се извади синя топка, която е $\frac{b}{a+b}$. Следователно $\frac{a-b}{a+b}=\frac{1}{3}$ и оттук $\frac{a}{b}=2$.

7. Вероятността при хвърляне на зар да се падне число, което се дели на 3, е $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Вероятността при 7 хвърляния на зар да се паднат точно три числа, които се делят на 3, е $C_7^3.\left(\frac{1}{3}\right)^3.\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{560}{3^7}$.

8. Сборът и произведението на две от числата 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 се дели на 4, когато числата са (2; 6) или (4; 8).Търсената вероятност е $\frac{2}{C_8^2}=\frac{1}{14}$.

Книга за учителя по
МАТЕМАТИКА
11 клас

Автори
Емил Колев
Мария Томова
Невена Събева-Колева

Редактор
Невена Събева-Колева

Графичен дизайн
Петко Минчев

Коректор
Мила Томанова

Българска. Първо издание, 2020 г.
ISBN 978-954-18-1602-8

Издател
„КЛЕТ БЪЛГАРИЯ“ ООД
1574 София, ул. „Никола Тесла“ № 5, BSR 2, етаж 4
тел.: 0700 47 400, e-mail: administration@bulvest2000.com
www.bulvest.com