Емил Колев • Иван Георгиев • Стелиана Кокинова

КНИГА ЗА УЧИТЕЛЯ

по математика
за 12. клас

• КЛЕТ БЪЛГАРИЯ •

Книга за учителя
по математика
за 12. клас

Автори
© Емил Миланов Колев, 2021
© Иван Георгиев Георгиев, 2021
© Стелиана Миткова Кокинова, 2021

Графичен дизайн
© Петко Енчев Минчев, 2021

Издател
© КЛЕТ БЪЛГАРИЯ, 2021

ISBN 978-954-18-1612-7

ПРИМЕРНИ МЕТОДИЧЕСКИ РАЗРАБОТКИ НА УРОЦИ

УРОК 12. ГЕНЕРАЛНА СЪВКУПНОСТ И ИЗВАДКА

Вид на урока: За нови знания

Изследването на дадени обекти се обуславя от необходимостта да се разберат и анализират основни техни характеристики.

Основните характеристики на произволно подмножество на генералната съвкупност може да се различават значително от техните истински стойности.

При реализиране на случайна извадка се използва генератор на случайни числа.

Клъстерна извадка се прави по-лесно от случайна или систематична извадка.

12. ГЕНЕРАЛНА СЪВКУПНОСТ И ИЗВАДКА

ЩЕ НАУЧИТЕ

- *Какво е генерална съвкупност и извадка. Какво е представителна извадка.*

Генералната съвкупност е множеството от всички обекти, които представляват интерес за дадено изследване.

Всяко подмножество на обектите от генералната съвкупност се нарича *извадка*.

Когато искаме да получим информация за дадена характеристика на изследваните обекти (например колко ученици са с наднормено тегло), е необходимо да изследваме всички обекти, от които се интересуваме. В повечето случаи това е невъзможно, тъй като изследваните обекти са много на брой. Затова от *генералната съвкупност* се прави *извадка*, след което обектите от тази извадка се изследват. Приема се, че направените изводи за извадката важат и за обектите от генералната съвкупност.

Представителна извадка

За да сме сигурни, че направените изводи за извадката ще важат и за данните от генералната съвкупност, извадката трябва да отговаря на определени условия. В извадката трябва да са отразени всички характеристики и особености на генералната съвкупност. За да се осигури това, най-важното условие е всеки член на генералната съвкупност да има равен шанс да попадне в извадката.

Извадка, която отговаря на тези условия, се нарича *представителна извадка*.

В зависимост от начина, по който се избират обектите в извадката, разглеждаме следните основни видове извадки:

Случайна извадка. При нея считаме, че всички членове на генералната съвкупност са поставени в кутия и от кутията по случаен начин са изтеглени членовете на случайната извадка. Това е предпочитаният начин за получаване на представителна извадка, но е труден за реализиране, тъй като трябва да имаме списък на всички членове на генералната съвкупност.

Систематична извадка. При този метод подреждаме всички елементи на генералната съвкупност в редица и ги номерираме с естествените числа 1,2,3,… и т.н. След това избираме естествено число k и включваме в извадката всички елементи, чиито номер се дели на k.

Клъстерна извадка. При този метод генералната съвкупност първо се разделя на групи (клъстери). След това се избират няколко от тези групи и в извадката се включват всички техни елементи.

Пример на клъстерна извадка. Целта на дадено изследване е да се определи способността на учениците от 7. клас да решават практически задачи. Тъй като провеждането на този изпит с всички ученици от 7. клас изисква много финансови и времеви ресурси, се определят няколко училища, в които да се проведе това изследване. В този случай представителността на извадката зависи от правилния избор на клъстерите (училищата).

Стратифицирана извадка. При този метод генералната съвкупност се разделя на групи (страти) по някакъв признак. Например, ако генералната съвкупност се състои от жителите на един град, можем да ги разделим на групи в зависимост от тяхната възраст. След това във всяка от тези групи се прилага случайна или систематична извадка.

44

Стратифицираната извадка осигурява равно представителство на отделните групи.

УРОК 12. ГЕНЕРАЛНА СЪВКУПНОСТ И ИЗВАДКА

Пример на стратифицирана извадка. В училище учат 250 момчета и 150 момичета. За да се осигури баланс в извадката по пол, разделяме всички ученици на две групи: 250 момчета и 150 момичета. След това (чрез случайна или систематична извадка) от първата група избираме 25 момчета, а от втората – 15 момичета. По този начин отношението на момчетата към момичетата е едно и също в извадката и в генералната съвкупност.

След определяне на членовете на представителна извадка за тях трябва да се събере необходимата информация. Това става чрез анализ на техните свойства, интервюта, задаване на въпроси по телефона, изпращане на въпроси по електронна поща и т.н. Избирането на конкретен метод зависи от наличното финансиране, определеното време за извършване на изследването и необходимостта от достоверност на информацията.

Определянето на представителна извадка само по себе си не гарантира достоверност на получените данни. Необходимо е да се следват строги процедури за събиране на информация за членовете на извадката.

Избори и социологически проучвания

Преди избори се правят социологически проучвания за нагласите на избирателите с цел да се предвиди резултатът от изборите. За целта се избира представителна извадка и се задава въпрос за коя партия биха гласували хората от нея. След това се приема (с известна грешка), че същото разпределение ще бъде вярно и за всички избиратели.

Обикновено се прави представителна извадка от около 1000 човека.

При социологически проучвания в деня на изборите първо се избират избирателните секции (т.е. прави се клъстерна извадка). Секциите се подбират така, че да се осигури представителност на извадката. След това от всяка секция се прави систематична извадка (като се интервюира например всеки пети гласувал).

Много често резултатите от изследването на представителна извадка не съответстват на действителните. Това се дължи на факта, че част от интервюираните не дават вярната информация за техния избор или отказват да отговорят.

Анализ на статистически данни

1. В интернет намерете информация за социологически проучвания на различни агенции за последните парламентарни избори. Сравнете ги с действителните резултати и определете каква грешка е допусната при всяко от тях.

2. Направете проучване сред учениците от вашия клас за това каква марка мобилен телефон харесват. Приемете, че учениците от вашия клас представляват представителна извадка за учениците от цялото училище и направете съответните изводи.

ЗАДАЧИ

1. Колко човека ще попаднат в систематична извадка, ако генералната съвкупност се състои от 500 човека и избираме всеки осми от тях?

2. Намерете отношението момичета : момчета във вашия клас. Може ли да се твърди, че отношението момичета : момчета в цялото училище е приблизително същото? Обосновете отговора си.

3. Използвайте номерата на учениците в класа, за да направите систематична извадка, като изберете всеки четвърти ученик. Сравнете средния успех на учениците от извадката със средния успех на всички ученици.

4. Може ли да се направи извод за музикалните предпочитания на цялото население, ако знаем каква музика слушат ползвателите на социалните мрежи?

Въпросът в задачата е: ползвателите на социалните мрежи представляват ли представителна извадка за музикалните предпочитания?

УРОК 21. ПОКАЗАТЕЛНИ УРАВНЕНИЯ, СВЕЖДАЩИ СЕ ЧРЕЗ ПОЛАГАНЕ ДО КВАДРАТНИ УРАВНЕНИЯ. УПРАЖНЕНИЕ

Вид на урока: За упражнение

21. ПОКАЗАТЕЛНИ УРАВНЕНИЯ, СВЕЖДАЩИ СЕ ЧРЕЗ ПОЛАГАНЕ ДО КВАДРАТНИ УРАВНЕНИЯ. УПРАЖНЕНИЕ

ЩЕ УПРАЖНИТЕ

- *Решаване на показателни уравнения, които след полагане се свеждат до квадратни уравнения.*

Тъй като $3^2 = 9$, то полагането $y = 3^x$ ще доведе до квадратно уравнение спрямо y.

След намиране на y, неизвестното x намираме, като заместим в полагането.

1. Да се реши уравнението $9^x - 2.3^x - 63 = 0$ и да се провери дали числото $k = \left(\sqrt[4]{2}\right)^{\log_2 81}$ е негов корен.

Решение: Полагаме $y = 3^x$, $y > 0$. Тогава уравнението $9^x - 2.3^x - 63 = 0$ добива вида

$$y^2 - 2y - 63 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 9 > 0,\ y_2 = -7 < 0.$$

От $3^x = 9$ намираме $x = 2$, което е единственото решение на уравнението.

За да намерим стойността на числото k, използваме основното логаритмично тъждество $a^{\log_a b} = b$ и получаваме

$$k = \left(\sqrt[4]{2}\right)^{\log_2 81} = \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{\log_2 81} = \left(2^{\log_2 81}\right)^{\frac{1}{4}} = 81^{\frac{1}{4}} = 3^{4.\frac{1}{4}} = 3.$$

Следователно числото k не е решение на уравнението.

Преди да положим, трябва да преобразуваме уравнението и да го запишем в удобен вид.

Видът на уравнението подсказва подходящото полагане.

2. Да се реши уравнението $2^{2(x^2-x)-3} - 2^{x^2-x-2} = 1$.

Решение: Уравнението представяме във вида

$$2^{2(x^2-x)}.2^{-3} - 2^{x^2-x}.2^{-2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\left(2^{x^2-x}\right)^2}{8} - \frac{2^{x^2-x}}{4} = 1 \Leftrightarrow.$$

$$\Leftrightarrow \left(2^{x^2-x}\right)^2 - 2.2^{x^2-x} - 8 = 0$$

Полагаме $y = 2^{x^2-x}$, $y > 0$ и получаваме квадратното уравнение

$$y^2 - 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 4 > 0, y_2 = -2 < 0.$$

От $y = 4$ намираме

$$2^{x^2-x} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -1.$$

3. Да се реши уравнението $3^{1+\sqrt{x-2}} + 3.3^{1-\sqrt{x-2}} = 28$.

Решение: Представяме уравнението във вида $3.3^{\sqrt{x-2}} + 3.\frac{3}{3^{\sqrt{x-2}}} = 28$.

Полагаме $3^{\sqrt{x-2}} = y$, $y > 0$ и решаваме уравнението

$$3y + \frac{9}{y} = 28 \Leftrightarrow 3y^2 - 28y + 9 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 9,\ y_2 = \frac{1}{3}.$$

От $y = 9$ намираме $3^{\sqrt{x-2}} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 6$.

При $y = \frac{1}{3}$ решаваме $3^{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^{\sqrt{x-2}} = 3^{-1} \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = -1$, което няма решение.

Следователно уравнението има единствено решение $x = 6$.

62

4. Да се реши уравнението $2^x + \frac{1}{2}.2^{|x|+1} = \frac{5}{2}$.

Решение: Уравнението е еквивалентно на $2^x + 2^{|x|} = \frac{5}{2}$. Ще разгледаме два случая.

При разкриване на модула трябва да разгледаме два случая.

I случай: $x \geq 0$. Тогава $|x| = x$ и уравнението е еквивалентно на

$$2^x + 2^x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2^x = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{5}{4} = \log_2 5 - 2.$$

II случай: $x < 0$.

Тогава $|x| = -x$ и уравнението можем да запишем във вида

$$2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2.2^{2x} - 5.2^x + 2 = 0.$$

Полагаме $2^x = y$, $y > 0$ и получаваме $2y^2 - 5y + 2 = 0$ с корени $y_1 = 2$ и $y_2 = \frac{1}{2}$.

От $2^x = 2$ намираме $x = 1 > 0$, което не е решение, а при $2^x = \frac{1}{2}$ намираме $x = -1 < 0$, което е решение.

Даденото уравнение има два корена: $x_1 = \log_2 5 - 2$ и $x_2 = -1$.

5. Да се реши уравнението $\frac{4.9^x - 2.3^x + 2}{3^x - 3} = 3^x - 1$.

Решение. Дефиниционното множество на уравнението се определя от условието $3^x - 3 \neq 0$, което е изпълнено при $x \neq 1$.

Полагаме $3^x = y$, $y > 0$ и уравнението добива вида

Може първо да опростим уравнението и след това да положим.

$$\frac{4y^2 - 2y + 2}{y - 3} = y - 1,\ y \neq 3.$$

Освобождаваме от знаменател и получаваме

$$4y^2 - 2y + 2 = y^2 - 4y + 3 \Leftrightarrow 3y^2 + 2y - 1 = 0.$$

Корените на полученото квадратно уравнение са $y_1 = -1 < 0$ и $y_2 = \frac{1}{3}$ ($y_2 > 0$, $y_2 \neq 3$). От $3^x = \frac{1}{3}$ намираме $x = -1$, което е единственото решение на задачата.

ЗАДАЧИ

1. Решете уравнението $2^{2x} - 6.2^x + 8 = 0$ и проверете дали има корен, равен на стойността на израза $k = 49^{\log_7 2} - \log_5\left(22 + \log_5 125\right)$.

2. Решете уравнението $2.3^{2x+4} = 5 - 3.3^{x+2}$.

3. Решете уравнението $3^{1+\sqrt{x+2}} + 3.3^{1-\sqrt{x+2}} + 28 = 0$.

4. Решете уравнението $16^x - p.4^{x+1} + 64 = 0$, където $p = \log_2 \frac{8.\sqrt[3]{4}.\sqrt{8}}{\sqrt[6]{2}}$.

63

Да се сравни със задача 3 от урока.

УРОК 23. ПРИЛОЖЕНИЕ НА ТРИГОНОМЕТРИЯТА ЗА РЕШАВАНЕ НА ГЕОМЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ. УПРАЖЕНИЕ

Вид на урока: За упражнение

Изполваме условието за аритметична прогресия и при изразяване на страните имаме само едно неизвестно – d.

Тъй като е даден ъгъл C, то за намиране на лицето ни трябват страните AC и BC. Трите страни на триъгълника са изразени чрез едно неизвестно. За намирането на това неизвестно ни трябва една връзка между страните. Тя се получава от косинусовата теорема.

За решаване на триъгълник са необходими три условия: $AC = 1$, $BC = 3$ и $\alpha - \beta = 30°$.

Използването на синусовата теорема ни дава тригонометрично уравнение за ъгъл B.

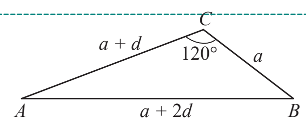
23. ПРИЛОЖЕНИЕ НА ТРИГОНОМЕТРИЯТА ЗА РЕШАВАНЕ НА ГЕОМЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ. УПРАЖНЕНИЕ

ЩЕ УПРАЖНИТЕ

- *Използването на тригонометрията при решаване на геометрични задачи.*

1. В ΔABC дължините на страните BC, AC и AB, взети в този ред, образуват аритметична прогресия. Ако $BC = a$ и $\sphericalangle C = 120°$, да се намери лицето на триъгълника.

Решение: Означаваме с d разликата на прогресията. Тогава $AC = a + d$, $AB = a + 2d$, като $d > 0$, тъй като AB е най-голямата страна. Прилагаме косинусовата теорема за страната AB.



$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC\cos 120° \Leftrightarrow$$

$$(a+2d)^2 = a^2 + (a+d)^2 - 2a(a+d)\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

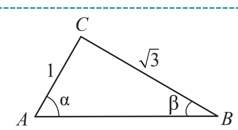
$$3d^2 + ad - 2a^2 = 0 \Leftrightarrow d_1 = \frac{2a}{3},\ d_2 = -a.$$

От $d = \frac{2a}{3}$ следва, че $AC = a + d = \frac{5a}{3}$ и

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.BC\sin 120° = \frac{1}{2}\cdot\frac{5a}{3}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{12}.$$

2. Даден е ΔABC със страни $AC = 1$ cm, $BC = \sqrt{3}$ cm и ъгли $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$. Да се намерят ъглите и лицето на триъгълника, ако $\alpha - \beta = 30°$.

Решение: Прилагаме синусовата теорема и използваме, че $\alpha = \beta + 30°$:



$$\frac{BC}{\sin\sphericalangle A} = \frac{AC}{\sin\sphericalangle B} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\beta} \Leftrightarrow \sin(\beta + 30°) = \sqrt{3}\sin\beta \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

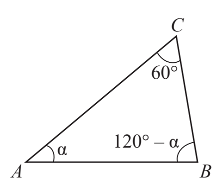
$$\sin\beta\cos 30° + \cos\beta\sin 30° = \sqrt{3}\sin\beta \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta + \frac{1}{2}\cos\beta = \sqrt{3}\sin\beta \Leftrightarrow$$

$$\cos\beta = \sqrt{3}\sin\beta \Leftrightarrow \operatorname{cotg}\beta = \sqrt{3}.$$

От последното равенство следва, че $\beta = 30°$. Тогава $\alpha = 60°$, ъглите на ΔABC са $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 30°$ и $\sphericalangle C = 90°$, а лицето е

$$S = \frac{1}{2}AC.BC = \frac{1}{2}.1.\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2.$$

3. В ΔABC с $\sphericalangle C = 60°$ да се намерят градусните мерки на $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$, ако $\frac{AC.BC}{AB^2} = \frac{1+\sqrt{3}}{3}$.



Решение. Нека R е радиусът на описаната окръжност и $\sphericalangle A = \alpha$. Тогава $\sphericalangle B = 120° - \alpha$ и от синусовата теорема получаваме:

$$AC = 2R\sin(120° - \alpha),\quad BC = 2R\sin\alpha,\quad AB = 2R\sin 60° = 2R.\frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}.$$

Като заместим в даденото равенство, получаваме:

88

Използването на синусовата теорема преобразува всяко равенство между страни в равенство между радиуса на описаната окръжност R и ъглите на триъгълника.

УРОК 23. ПРИЛОЖЕНИЕ НА ТРИГОНОМЕТРИЯТА ЗА РЕШАВАНЕ НА ГЕОМЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ. УПРАЖНЕНИЕ

$$\frac{2R\sin(120^\circ-\alpha).2R\sin\alpha}{\left(R\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1+\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\frac{4\sin(120^\circ-\alpha)\sin\alpha}{3}=\frac{1+\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow$$

$$2\sin(120^\circ-\alpha)\sin\alpha=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\overset{(22)}{\Leftrightarrow}\cos(120^\circ-2\alpha)-\cos120^\circ=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$$

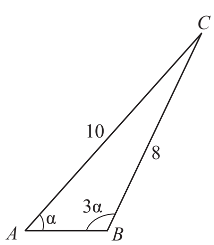
$$\cos(120^\circ-2\alpha)+\frac{1}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\cos(120^\circ-2\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

От последното равенство следва, че $120^\circ - 2\alpha = \pm30^\circ$ и получаваме, че $\alpha = 45^\circ$ или $\alpha = 75^\circ$. Следователно $\sphericalangle A = 45^\circ$, $\sphericalangle B = 75^\circ$ или $\sphericalangle A = 75^\circ$, $\sphericalangle B = 45^\circ$.

Да се обърне внимание, че R се съкращава и остава тригонометрично уравнение.

4. Даден е ΔABC със страни $AC = 10$ cm, $BC = 8$ cm и $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = 3\alpha$. Да се пресметнат:

а) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin3\alpha$ и $\cos3\alpha$; б) AB и лицето на триъгълника.



Решение: а) Прилагаме синусовата теорема:

$$\frac{AC}{\sin\sphericalangle B}=\frac{BC}{\sin\sphericalangle A}\Leftrightarrow\frac{10}{\sin3\alpha}=\frac{8}{\sin\alpha}\Leftrightarrow4\sin3\alpha=5\sin\alpha.$$

Прилагането на синусовата теорема води до получаване на тригонометрично уравнение.

В последното равенство заместваме $\sin3\alpha\overset{(25)}{=}3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ и получаваме $12\sin\alpha-16\sin^3\alpha=5\sin\alpha\Leftrightarrow16\sin^3\alpha=7\sin\alpha$.

Тъй като α е ъгъл в триъгълник и $\sin\alpha\neq0$, от последното равенство следва, че $\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$. Тогава $\cos\alpha=\frac{3}{4}$, $\sin3\alpha=\frac{5}{4}\sin\alpha=\frac{5}{4}.\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$ и

$$\cos3\alpha\overset{(26)}{=}4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=4\cdot\frac{27}{64}-3\cdot\frac{3}{4}=-\frac{9}{16}.$$

б) Означаваме $AB = c$ и прилагаме косинусовата теорема за страната AC.

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB.BC\cos3\alpha\Leftrightarrow100=c^2+64+2c.8\cdot\frac{9}{16}\Leftrightarrow c^2+9c-36=0.$$

Корените на квадратното уравнение са $c_1 = 3$, $c_2 = -12$.

Следователно $AB = 3$ cm и

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC\sin\alpha=\frac{1}{2}.3.10\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{15\sqrt{7}}{4}\text{ cm}^2.$$

ЗАДАЧИ

1. Даден е ΔABC със страни $AC = 1$ cm, $BC=\sqrt{2}$ cm и ъгли $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$. Да се намерят ъглите и лицето на триъгълника, ако $\alpha = \beta = 45^\circ$.

2. В окръжност k са построени хорда AB и точка $C \in k$ така, че AB се вижда от C под ъгъл 120°. Пресметнете $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ на ΔABC, ако $\frac{AC.BC}{AB^2}=\frac{\sqrt{3}-1}{3}$.

3. Даден е ΔABC с $\sphericalangle C = 60^\circ$, радиус R на описаната окръжност и височина h_C, спусната от върха C. Ако $R = 2h_C$ и $AC > BC$, намерете градусните мерки на $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$.

4*. Даден е ΔABC със страни $BC = 1$ cm, $AC=2\sqrt{2}$ cm, $\sphericalangle A = \alpha$ и $\sphericalangle B = 3\alpha$. Докажете, че $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

УРОК 50. ЕКСТРЕМАЛНИ ЗАДАЧИ В ПЛАНИМЕТРИЯТА

Вид на урока: За нови знания

50. ЕКСТРЕМАЛНИ ЗАДАЧИ В ПЛАНИМЕТРИЯТА

ЩЕ НАУЧИТЕ

- *Как се решават екстремални задачи в планиметрията*

Двата основни метода за решаване на екстремални задачи са:
- Изразяване на неизвестната величина чрез една променлива и намиране на най-малката или най-голямата стойност на получената функция;
- Използване на неравенствата между средно квадратично, средно аритметично и средно геометрично.

При решаване на екстремални задачи често се използва следното свойство: *Ако сборът на две положителни числа е константа, то тяхното произведение е най-голямо, когато двете числа са равни.* Верността му следва от неравенството

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Когато от множество от фигури трябва да намерим тази, за която дадена величина приема най-голяма или най-малка стойност, казваме, че решаваме екстремална задача. Например:
- от всички правоъгълници с даден периметър да се намери този с най-голямо лице;
- от всички правоъгълни триъгълници с дадена хипотенуза да се намери този с най-голямо лице;
- от всички правоъгълници с дадено лице да се намери този с най-малък периметър.

1. Кой от всички правоъгълници с периметър 40 cm има най-голямо лице?
Решение: Да разгледаме правоъгълник с периметър 40 cm и страни x и y cm. Тогава $x + y = 20$, като лицето S на правоъгълника е равно на xy. Следователно търсим най-голямата стойност на $S = xy$, при условие че $x + y = 20$.
Първи начин: От $x + y = 20$ изразяваме $y = 20 - x$ и заместваме:
$$S = xy = x(20 - x) = 20x - x^2.$$
Търсим най-голямата стойност на квадратната функция $f(x) = -x^2 + 20x$ за $0 \leq x \leq 20$. Тъй като върхът на параболата е с абсциса
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{-2} = 10,$$
търсеният максимум се достига при $x = 10$ cm и тогава $y = 20 - x = 10$ cm. Следователно измежду всички правоъгълници с даден периметър най-голямо лице има квадратът.
Втори начин: Използваме неравенството между средно аритметично и средно геометрично. Получаваме:
$$10 = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy},$$
откъдето следва $xy \leq 100$. Тъй като равенство се достига при $x = y$, то най-голямо лице има квадратът.

2. Сборът от дължините на страните AB и AC на триъгълник ABC е равен на 10 cm, а ъгълът между тези страни е 60°. Намерете най-малката дължина на страната BC.
Решение. От косинусовата теорема за ΔABC получаваме:
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.BC\cos 60^\circ =$$
$$= (AB + BC)^2 - 2AB.AC(1 + \cos 60^\circ) = 10^2 - 3AB.AC.$$
От горното равенство следва, че страната BC има най-малка дължина, когато произведението $AB.AC$ е най-голямо. Понеже сборът $AB + AC = 10$ е константа, произведението $AB.AC$ приема най-голяма стойност, когато $AB = AC = 5$. Тогава

126

В случая двете неизвестни участват симетрично както в условието $x + y = 20$, така и във функцията за лицето $S = xy$. Това означава, че няма значение чрез коя от двете неизвестни ще изразим лицето на правоъгълника.

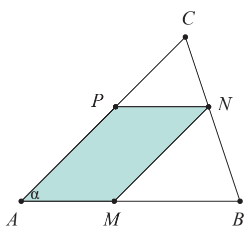
За да се подсетим кое неравенство да използваме, разглеждаме вида на даденото условие $x + y = 20$ и вида на функцията, на която търсим най-голяма стойност $S = xy$. Тъй като сборът $x + y$ е свързан със средното аритметично, а xy – със средното геометрично, то използваме неравенството между средното аритметично и средното геометрично.

Това свойство може да се използва в задачи без доказателство.

Това решение може да се сравни по трудност с директно заместване на $AB = 10 - AC$ и изразяване на BC^2 като функция на AC.

$$BC = \sqrt{100 - 3AB.AC} \geq \sqrt{100 - 3.5.5} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}.$$

Следователно търсената най-малка дължина на страната BC е 5 cm и тогава триъгълникът е равностранен.



3. Даден е триъгълник ABC с лице 20 cm². Върху страните AB, BC и CA са избрани съответно точки M, N и P така, че четириъгълникът $AMNP$ е успоредник. Намерете най-голямата стойност на лицето на успоредника $AMNP$.

Решение: От условието $S_{ABC} = 20$ cm² получаваме

$$\frac{AC.AB\sin\alpha}{2} = 20 \Leftrightarrow AC.AB\sin\alpha = 40.$$

Тъй като MN е успоредна на AC и NP е успоредна на AB, намираме

$$\frac{MN}{AC} = \frac{BN}{BC} \Leftrightarrow MN = AC\cdot\frac{BN}{BC} \quad \text{и}$$

$$\frac{PN}{AB} = \frac{CN}{BC} \Leftrightarrow PN = AB\cdot\frac{CN}{BC}.$$

Като използваме тези равенства, пресмятаме лицето S на успоредника $AMNP$:

$$S = AP.AM\sin\alpha = MN.PN\sin\alpha = AC\cdot\frac{BN}{BC}\cdot AB\cdot\frac{CN}{BC}\sin\alpha =$$

$$= AC.AB\sin\alpha\cdot\frac{BN}{BC}\cdot\frac{CN}{BC} = 40\cdot\frac{BN.CN}{BC^2}.$$

Следователно търсим най-голямата стойност на произведението $BN.CN$. Тъй като $BN + CN = BC$, произведението $CN.BN$ е най-голямо, когато двете отсечки са равни. Търсената най-голяма стойност е равна на

$$S_{\max} = 40\cdot\frac{\frac{BC}{2}\cdot\frac{BC}{2}}{BC^2} = 10 \text{ cm}^2.$$

Изразяваме лицето на триъгълника чрез елементите на триъгълника.

За лицето на успоредника ни трябват дължините на двете му страни. За намирането им използваме теоремата на Талес.

Изразяваме лицето на успоредника чрез елементите на триъгълника.

Отново използваме свойството за произведение на две числа с фиксиран сбор.

ЗАДАЧИ

1. Намерете най-голямото лице на успоредник с периметър 60 cm и остър ъгъл α.

2. Върху отсечка AB с дължина 10 cm е избрана точка M. Сборът от лицата на равностранните триъгълници с дължини на страните AM и BM е равен на S. Намерете:
а) най-малката стойност на S;
б) най-голямата стойност на S.

3. От всички правоъгълници с дадено лице да се намери този с най-малък периметър.
Упътване: Ако a и b са страните на дадения правоъгълник, използвайте неравенството

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

4. Колко най-много е лицето на правоъгълен триъгълник с хипотенуза 24 cm?
Упътване: Ако a и b са катетите на дадения триъгълник, използвайте неравенството

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \sqrt{ab}.$$

5. Измежду всички правоъгълници с дължина на диагонала d намерете този, който има най-голям периметър.
Упътване: Използвайте неравенството

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}.$$

За задачи 2,3,4,5 може да се направи сравнение на решение с неравенства и с изразяване на търсената величина като функция на една променлива. По този начин може да се наблегне на предимствата при използване на неравенства.

УРОК 54. ГРАФИЧНИ МОДЕЛИ ЗА РЕШАВАНЕ НА ЕКСТРЕМАЛНИ ЗАДАЧИ

Вид на урока: За нови знания

Задачата може да се реши и като се използва, че най-малката и най-голямата стойност на $f(x)$ се достигат когато знаменателят (в случая квадратен тричлен) достига съответно най-голямата и най-малката си стойност. По този начин задачата се свежда до намиране на НГС и НМС на квадратен тричлен.

54. ГРАФИЧНИ МОДЕЛИ ЗА РЕШАВАНЕ НА ЕКСТРЕМАЛНИ ЗАДАЧИ

ЩЕ НАУЧИТЕ

- *Как се решават екстремални задачи, като се използват графики на функции*

При решаване на екстремални задачи търсим най-голяма или най-малка стойност на функция $f(x)$, когато променливата x се изменя в даден интервал. В урок 44 и 45 изучихме как се намира най-голяма и най-малка стойност на линейна и квадратна функция в даден интервал.

Най-голяма или най-малка стойност на функция, която не е линейна или квадратна, може да се намери, ако знаем как изглежда нейната графика. За построяване на графиката използваме възможностите на съвременните компютърни програми.

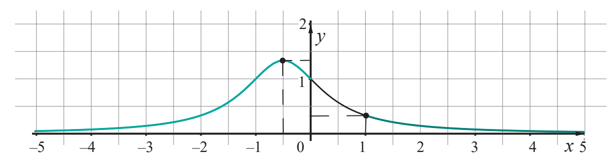
1. Да се намери най-малката и най-голямата стойност на функцията

$$f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$$

а) в интервала $[-5,0]$; б) в интервала $[1,+\infty)$.

Решение: Построяваме графиката на функцията $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$, като използваме компютърна програма.

а) От графиката следва, че в интервала $[-5,0]$ най-малката стойност на функцията се достига при $x=-5$, а най-голямата стойност при



$x=-\dfrac{1}{2}$. Търсените стойности са

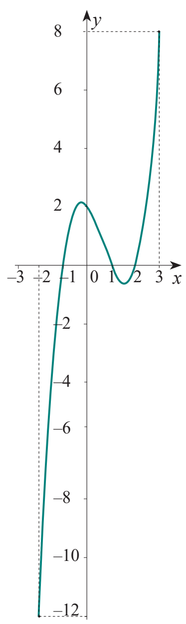
$$\min_{x\in[-5;0]} f(x)=f(-5)=\frac{1}{21} \text{ и } \max_{x\in[-5;0]} f(x)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}.$$

б) От графиката се вижда, че в интервала $[1,+\infty)$ функцията намалява, като винаги остава положителна. Следователно функцията няма най-малка стойност, а най-голямата ѝ стойност се достига при $x=1$. Тази най-голяма стойност е равна на

$$\max_{x\in[1;\infty)} f(x)=f(1)=\frac{1}{3}.$$

134

УРОК 54. ГРАФИЧНИ МОДЕЛИ ЗА РЕШАВАНЕ НА ЕКСТРЕМАЛНИ ЗАДАЧИ



2. Да се намери най-малката и най-голямата стойност на функцията $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ в интервала $[-2{,}3]$.

Решение: Построяваме графиката на функцията $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. От графиката на функцията можем да направим следните наблюдения. Най-малката стойност в интервала $[-2{,}3]$ се достига при $x = -2$ и е равна на

$$\min_{x\in[-2;3]} f(x) = f(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - (-2) + 2 = -12.$$

Най-голямата стойност в интервала $[-2{,}3]$ се достига при $x = 3$ и е равна на

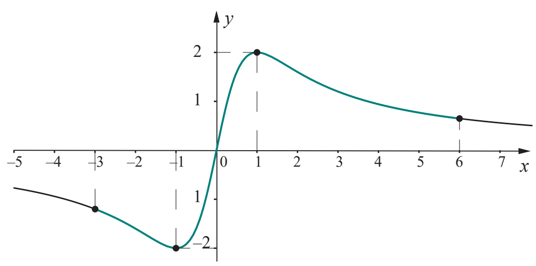
$$\max_{x\in[-2;3]} f(x) = f(3) = 3^3 - 2.3^2 - 3 + 2 = 8.$$

В този случай НМС и НГС се достигат в край на интервала.

3. Да се намери най-малката и най-голямата стойност на функцията

$$f(x) = \frac{4x}{x^2+1} \text{ в интервала:}$$

а) $[-3{,}6]$; б) $[2, +\infty)$.



Решение: Построяваме графиката на дадената функция.

а) От графиката на функцията виждаме, че $f(x)$ има локален минимум при $x = -1$ и локален максимум при $x = 1$. Най-малката стойност в интервала $[-3{,}6]$ се достига при $x = -1$ и е равна на $f(-1) = -2$, а най-голямата стойност се достига при $x = 1$ и е равна на $f(1) = 2$.

В този случай НМС и НГС се достигат във вътрешни точки.

б) В интервала $[2, +\infty)$ функцията е намаляваща. Тъй като $x^2 + 1 > 0$ за всяко x, то при положителни стойности на x функцията приема само положителни стойности. Следователно най-голямата стойност се достига при $x = 2$ и е равна на $f(2) = \frac{8}{5}$. В този интервал функцията няма най-малка стойност.

Функцията няма НМС, защото $f(x)$ може да приема произволно близки до 0 стойности, но никога не става равна на 0.

ЗАДАЧИ

1. Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията:

а) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$ в интервала $[-2{,}4]$;

б) $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+3}$ в интервала $[-3{,}6]$;

в) $f(x) = \frac{1}{x^4+5}$ в интервала $(-\infty,+\infty)$;

г) $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ в интервала $[2,+\infty)$.

2. Докажете неравенствата:

$$-2 \le \frac{x^2+4x+1}{x^2+x+1} \le 2 .$$

135

Може да се сравни със задача 1 от урока и да се реши по двата възможни начина.

Може да се използва, че знаменателят винаги е положителен и да се сведе до неравенство от вида $(ax + b)^2 \ge 0$.

ПРИМЕРНИ ВАРИАНТИ ЗА ДИАГНОСТИКА НА РЕЗУЛТАТИ ОТ ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА В 12. КЛАС

ПРИМЕРНА КЛАСНА РАБОТА ЗА ПЪРВИЯ УЧЕБЕН СРОК

ВАРИАНТ 1

I част

1. За кой от статистическите редове дадената таблица е таблица на акумулираните честоти?

Акумулирана честота	1	3	4	6	7
Стойност	1	2	3	4	5

А) 1, 3, 4, 2, 4, 3, 5 Б) 5, 3, 5, 2, 4, 1, 2 В) 5, 3, 4, 2, 4, 1, 2 Г) 5, 3, 5, 2, 1, 1, 3

2. Дисперсията на данните 1, x, 7 е равна на 6. Числото x е равно на:

А) 2 Б) 3 В) 4 Г) 5

3. Корените на уравнението $\left(\frac{625}{81}\right)^{x+1}-\left(\frac{9}{25}\right)^{x-3}=0$ са от интервала

А) $(-\infty; -1)$ Б) $(-1; 0)$ В) $(0; 1)$ Г) $(1; \infty)$

4. Корените на уравнението $\lg(7x+1)-\lg 9=2\lg 2$ са от интервала

А) $(-\infty; -5)$ Б) $(-5; 0)$ В) $(0; 3)$ Г) $(3; \infty)$

5. В интервала $[0; 2\pi]$ уравнението $\sin 2x=\frac{1}{2}$ има:

А) един корен Б) два корена В) три корена Г) четири корена

II част

6. Решете уравнението $2^x.3^x=6\sqrt{6^{4x-10}}$.

7. Намерете сбора от корените на уравнението $\sin 2x=\cos x$, които са в интервала $[0; \pi]$.

III част

8. Намерете лицето на ΔABC със страни $AC=\sqrt{6}$ cm, $BC=\sqrt{2}$ cm и $\sphericalangle ABC=2\sphericalangle BAC$.

ПРИМЕРНА КЛАСНА РАБОТА ЗА ПЪРВИЯ УЧЕБЕН СРОК

ВАРИАНТ 2

I част

1. За кой от статистическите редове дадената таблица е таблица на акумулираните честоти?

Акумулирана честота	1	3	4	6	8
Стойност	1	2	3	4	5

А) 1, 3, 4, 2, 4, 3, 3, 5 Б) 5, 3, 5, 2, 4, 1, 2, 2 В) 5, 5, 3, 4, 2, 4, 1, 2 Г) 5, 3, 5, 2, 1, 1, 3, 1

2. Дисперсията на данните 1, 4, x е равна на 6. Числото x е равно на:

А) 5 Б) 6 В) 7 Г) 8

3. Корените на уравнението $\left(\frac{6}{7}\right)^{-2x} - \left(\frac{49}{36}\right)^{-\frac{3}{2}} = 0$ са от интервала:

А) $(-\infty; -1{,}5)$ Б) $[-1{,}5; 0)$ В) $(0; 1{,}5)$ Г) $[1{,}5; \infty)$

4. Сборът от корените на уравнението $\lg(3x^2 - 2x) - \lg(5x - 4)$ е:

А) $-\frac{7}{3}$ Б) $-\frac{1}{3}$ В) $\frac{1}{3}$ Г) $\frac{7}{3}$

5. При $k \in \mathbb{Z}$ корените на уравнението $2\cos 3x = 1$ се задават с равенствата:

А) $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ Б) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

В) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ Г) $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3},\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$

II част

6. Решете уравнението $\log_3(x+17) + \log_7(x-9).\log_3 7 = 3$.

7. Намерете сбора от корените на уравнението $\sin x - \cos\frac{x}{2} = 0$, които са в интервала $[0; \pi]$.

III част

8. Решете уравнението $2.4^x - 15.2^x - 8 = 0$.

ПРИМЕРНА КЛАСНА РАБОТА ЗА ВТОРИЯ УЧЕБЕН СРОК

Вариант 1

I част

1. Броят на целите числа, които са решения на неравенството $|x^2 - x - 3| < 9$, е:

А) 8 Б) 6 В) 5 Г) 3

2. Множеството от решенията на неравенството $3\sqrt{6+x-x^2}+2>4x$ е:

А) $x \in \left[\frac{1}{2};2\right)$ Б) $x \in \left[-2;\frac{1}{2}\right]$ В) $x \in [-2; 2)$ Г) $x \in \varnothing$

3. Ако a и b са най-малката и най-голямата стойност на функцията $f(x) = x^2 - 2x - 1$ в интервала $[-1; 2]$, а c и d са най-малката и най-голямата стойност на функцията $g(x) = 2x + 0{,}5$ в същия интервал, то:

А) $c < a < b < d$ Б) $a < c < b < d$ В) $a < b < c < d$ Г) $c < d < a < b$

4. Ако средното аритметично на числата m и $5m$ е 6, то средното хармонично на $\frac{m}{2}$ и $2m$ е:

А) $\frac{8}{5}$ Б) $\frac{5}{2}$ В) 2 Г) $\frac{2}{5}$

5. Ако x и y са положителни числа и $x + y = 8$, то най-голямата стойност на израза $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ е:

А) 2 Б) $2\sqrt{2}$ В) 4 Г) $4\sqrt{2}$

II част

6. Решете неравенството $2^{x+1} + 2^{2-x} > 9$.

7. Решете неравенството $\log_2(x^2 + x) < 1$.

III част

8. Сборът от дължините на страните AB и BC в триъгълник ABC е равен на 8 cm, а ъгълът между тези страни е равен на 60°. Намерете най-голямата възможна стойност на лицето на триъгълника ABC.

ПРИМЕРНА КЛАСНА РАБОТА ЗА ВТОРИЯ УЧЕБЕН СРОК

Вариант 2

I част

1. Броят на естествените числа, които са решения на неравенството $|x^2 - x - 4| < 8$, е:

А) 8 Б) 6 В) 5 Г) 3

2. Множеството от решенията на неравенството $3\sqrt{6+x-x^2} \le 4x-2$ е:

А) $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ Б) $x \in [-2; 3]$ В) $x \in [-\infty; -1] \cup [2; \infty]$ Г) $x \in [2; 3]$

3. Най-малката стойност на функцията $y = x^2 - 2x - 3$ е най-голяма стойност на функцията:

А) $y = x^2 - 4x$ Б) $y = -x^2 + 2x + 3$ В) $y = -x^2 - 2x - 5$ Г) $y = -x^2 + 4x$

4. Ако a и b са положителни числа, то числото $\sqrt{\frac{a+b}{2}}$ е средното:

А) аритметично на a и b

Б) геометрично на $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$

В) квадратично на $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$

Г) хармонично на $\frac{1}{\sqrt{a}}$ и $\frac{1}{\sqrt{b}}$

5. Ако x и y са положителни числа и $xy = 6$, то най-малката стойност на израза $(x + 2)(y + 3)$ е:

А) 30 Б) $12\sqrt{6}$ В) 24 Г) $12+2\sqrt{6}$

II част

6. Решете неравенството $\lg(2x-1) - \lg\frac{1}{x+4} > \lg 18$.

7. Намерете най-малката стойност на функцията $f(x) = x^2 + \frac{3}{x^2}$.

III част

8. Лицето на триъгълника ABC е равно на 9 cm^2, а ъгълът между страните AB и BC е равен на 30°. Намерете най-малката възможна стойност на сбора на страните AB и BC.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ ВАРИАНТИТЕ ЗА ДИАГНОСТИКА НА РЕЗУЛТАТИ ОТ ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА В 12. КЛАС

ПРИМЕРНА КЛАСНА РАБОТА ЗА ПЪРВИЯ УЧЕБЕН СРОК

Вариант 1

1. В

2. В

3. В

4. Г

5. Имаме $\sin 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi. \end{array}\right.$

В интервала [0; 2π] уравнението има 4 решения (отговор Г): $x_1 = \dfrac{\pi}{12}$, $x_2 = \dfrac{13\pi}{12}$, получени от $x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$ при $k = 0$ и $k = 1$ и $x_3 = \dfrac{5\pi}{12}$, $x_4 = \dfrac{17\pi}{12}$, получени от $x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi$ при $k = 0$ и $k = 1$.

6. $x = 4$

7. $\dfrac{3\pi}{2}$. Имаме $\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow 2\sin x.\cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow (2\sin x - 1)\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{2} \cup \cos x = 0$.
От $\sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$ и $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ намираме корените $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$, $x_2 = \dfrac{5\pi}{6}$ и $x_3 = \dfrac{\pi}{2}$, които са в интервала [0; π]. Тогава

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.$$

8. Означаваме $\sphericalangle BAC = \alpha$. Тогава $\sphericalangle ABC = 2\alpha$ и прилагаме синусовата теорема:

$$\frac{AC}{\sin \sphericalangle ABC} = \frac{BC}{\sin \sphericalangle BAC} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}}{\sin 2\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\sin \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{2\cancel{\sin \alpha}.\cos \alpha}{\cancel{\sin \alpha}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow .$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Тогава $\sphericalangle BAC = \alpha = 30^\circ$, $\sphericalangle ABC = 2\alpha = 60^\circ$, $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ и

$$S_{ABC} = \frac{AC.BC}{2} = \frac{\sqrt{6}.\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

ПРИМЕРНА КЛАСНА РАБОТА ЗА ПЪРВИЯ УЧЕБЕН СРОК

Вариант 2

1. В

2. В

3. Б

4. Г

5. А. Имаме $2\cos 3x = 1 \Leftrightarrow \cos 3x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 3x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}$

6. $x_1 = 10 \in DM,\ x_2 = -18 \notin DM$

7. $\dfrac{4\pi}{3}$. Имаме

$\sin x - \cos\dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\sin\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(2\sin\dfrac{x}{2} - 1\right)\cos\dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2} \cup \cos\dfrac{x}{2} = 0$.

От $\sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + 4k\pi,\ x = \dfrac{5\pi}{3} + 4k\pi$ и

$\cos\dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$ намираме корените $x_1 = \dfrac{\pi}{3}$ (получен от $x = \dfrac{\pi}{3} + 4k\pi$ при $k = 0$) и $x_2 = \pi$ (получен от $x = \pi + 2k\pi$ при $k = 0$), които са в интервала $[0; \pi]$.

Тогава $x_1 + x_2 = \dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{4\pi}{3}$.

8. $x = 3$

ПРИМЕРНА КЛАСНА РАБОТА ЗА ВТОРИЯ УЧЕБЕН СРОК

Вариант 1

1. Б

2. В

3. Б. Абсцисата на върха на параболата $f(x) = x^2 - 2x - 1$ е $x_0 = 1 \in [-1;\ 2]$ и $a = f_{min} = f(1) = -2$, $b = f_{max} = f(-1) = 2$ ($x = -1$ е по-отдалеченият от x_0 край на интервала).

Функцията $g(x) = 2x + 0{,}5$ е растяща и при $x \in [-1;\ 2]$ $c = g_{min} = g(-1) = -1{,}5$, а $d = g_{max} = g(2) = 4{,}5$.

Следователно $a < c < b < d$.

4. А. Средното аритметично на числата m и $5m$ е $\dfrac{m+5m}{2} = 3m$ и от $3m = 6$, намираме $m = 2$.

Тогава средното хармонично на $\dfrac{m}{2} = 1$ и $2m = 4$ е $\dfrac{2}{\frac{1}{1}+\frac{1}{4}} = \dfrac{2}{\frac{5}{4}} = \dfrac{8}{5}$.

5. Б. От неравенството между средното аритметично и средното квадратично следва, че

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} \le \sqrt{\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y} \le 2\sqrt{\frac{x+y}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y} \le 2\sqrt{4} \Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y} \le 4,$$

като $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 4$ при $x = y = 4$.

6. $x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$

7. $x \in (-2; -1) \cup (0; 1)$

8. $4\sqrt{3}$.

ПРИМЕРНА КЛАСНА РАБОТА ЗА ВТОРИЯ УЧЕБЕН СРОК

Вариант 2

1. Г

2. Г

3. В. Абсцисата на върха на параболата $y = x^2 - 2x - 3$ е $x_0 = 1$ и $y_{\min} = y(1) = -4$.

От посочените функции най-голяма стойност ще имат тези с отрицателен старши коефициент, като съответните екстремални стойности са: Б) $y_{\max} = y(1) = 4$; В) $y_{\max} = y(-1) = -4$; Г) $y_{\max} = y(2) = 4$.

4. В. От равенството $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} = \sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2}{2}}$ следва, че числото $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$ е средното квадратично на $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$.

5. В

6. $x \in (2; \infty)$

7. $f_{\min} = 2\sqrt{3}$.Прилагаме неравенството $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$ между средното аритметично и средното геометрично за $a = x^2$ и $b = \dfrac{3}{x^2}$: $x^2 + \dfrac{3}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 . \dfrac{3}{x^2}} \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{3}{x^2} \geq 2\sqrt{3}$.

Най-малката стойност на функцията $f\left(x\right) = x^2 + \dfrac{3}{x^2}$ е $2\sqrt{3}$ и се достига при

$x^2 = \dfrac{3}{x^2} \Leftrightarrow x^4 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{3}$. Следователно $f_{\min} = f\left(\pm\sqrt[4]{3}\right) = 2\sqrt{3}$.

8. 12 cm.

ГОДИШНО ТЕМАТИЧНО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ ПО УЧЕБНИЯ ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА ЗА 12. КЛАС

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за:
1.	1	Вероятност. Класическа вероятност	Начален преговор
2.	1	Квадратна функция. Показателна и логаритмична функция.	Начален преговор
3.	2	Тригонометрични функции	Начален преговор
4.	2	Входно равнище. Тема за самоконтрол	Контрол
5.	3	Групиране на данни. Хистограма и полигон	Нови знания
6.	3	Групиране на данни. Хистограма и полигон. Упражнение	Упражнение
7.	4	Таблица и графично представяне на акумулираните честоти.	Нови знания
8.	4	Таблица и графично представяне на акумулираните честоти. Упражнение	Упражнение
9.	5	Характеристики на разсейването	Нови знания
10.	5	Характеристики на разсейването. Упражнение	Упражнение
11.	6	Вероятност и статистическа честота	Нови знания
12.	6	Генерална съвкупност и извадка	Нови знания
13	7	Оценяване на неизвестен дял в генерална съвкупност чрез извадки	Нови знания
14.	7	Оценяване на неизвестен дял в генерална съвкупност чрез извадки. Упражнение	Упражнение
15.	8	Статистика. Тема за самоконтрол	Контрол
16.	8	Модулни уравнения от вида $\lvert ax^2 + bx + c \rvert = m$	Нови знания
17.	9	Модулни уравнения от вида $\lvert ax^2 + bx + c \rvert = m$. Упражнение	Упражнение
18.	9	Основни показателни уравнения	Нови знания
19.	10	Основни показателни уравнения. Упражнение	Упражнение
20.	10	Показателни уравнения, свеждащи се чрез полагане до квадратни уравнения	Нови знания
21.	11	Показателни уравнения, свеждащи се чрез полагане до квадратни уравнения. Упражнение	Упражнение
22.	11	Основни логаритмични уравнения	Нови знания
23.	12	Основни логаритмични уравнения. Упражнение	Упражнение
24.	12	Логаритмични уравнения, свеждащи се чрез полагане до квадратни	Нови знания
25.	13	Логаритмични уравнения, свеждащи се чрез полагане до квадратни. Упражнение	Упражнение
26.	13	Решаване на уравнения от вида $\sin x = a$ и $\cos x = a$	Нови знания
27.	14	Решаване на уравнения от вида $\sin x = a$ и $\cos x = a$. Упражнение	
28.	14	Решаване на основни тригонометрични уравнения $\mathrm{tg}\, x = a$ и $\mathrm{cotg}\, x = a$	Нови знания
29.	15	Решаване на основни тригонометрични уравнения $\mathrm{tg}\, x = a$ и $\mathrm{cotg}\, x = a$. Упражнение	Упражнение
30.	15	Тригонометрични уравнения, които се свеждат до квадратни	
31.	16	Тригонометрични уравнения, които се свеждат до квадратни. Упражнение	Упражнение

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за:
32.	16	Приложение на тригонометрията за решаване на геометрични задачи	Нови знания
33.	17	Приложение на тригонометрията за решаване на геометрични задачи. Упражнение	Упражнение
34.	17	Уравнения. Тема за самоконтрол	Контрол
35.	18	Класна работа	Контрол
36.	18	Модулни неравенства от вида $\lvert ax^2 + bx + c\rvert < m$ и $\lvert ax^2 + bx + c\rvert > m$	Нови знания
37.	19	Модулни неравенства от вида $\lvert ax^2 + bx + c\rvert < m$ и $\lvert ax^2 + bx + c\rvert > m$. Упражнение	Упражнение
38.	19	Ирационални неравенства от вида $\sqrt{ax^2+bx+c} < mx + n$ и $\sqrt{ax^2+bx+c} > mx + n$	Нови знания
39.	20	Ирационални неравенства от вида $\sqrt{ax^2+bx+c} < mx + n$ и $\sqrt{ax^2+bx+c} > mx + n$. Упражнение	Упражнение
40.	21	Основни показателни неравенства	Нови знания
41.	21	Основни показателни неравенства. Упражнение	Упражнение
42.	22	Основни логаритмични неравенства	Нови знания
43.	22	Основни логаритмични неравенства. Упражнение	Упражнение
44.	23	Неравенства. Тема за самоконтрол	Контрол
45.	23	Линейна и квадратна функция. Най-голяма и най-малка стойност	Нови знания
46.	24	Линейна и квадратна функция. Най-голяма и най-малка стойност. Упражнение	Упражнение
47.	24	Основни елементарни неравенства.	Нови знания
48.	25	Основни елементарни неравенства. Упражнение.	Упражнение
49.	25	Екстремални задачи в алгебрата	Контрол
50.	26	Екстремални задачи в алгебрата. Упражнение.	Преговор
51.	26	Екстремални задачи в планиметрията	Нови знания
52.	27	Екстремални задачи в планиметрията. Упражнение	Упражнение
53.	27	Класна работа	Контрол
54.	28	Практически задачи за намиране на най-голяма и най-малка стойност на елементарни функции	Нови знания
55.	28	Практически задачи за намиране на най-голяма и най-малка стойност на елементарни функции. Упражнение	Упражнение
56.	29	Графични модели при решаване на екстремални задачи	Нови знания
57.	29	Екстремални задачи. Обобщение	Упражнение
58.	30	Екстремални задачи. Тема за самоконтрол	Контрол
59.	30	Статистика	Годишен преговор
60.	31	Уравнения	Годишен преговор
61.	31	Неравенства	Годишен преговор

УЧЕБНА ПРОГРАМА ПО МАТЕМАТИКА ЗА ДВАНАДЕСЕТИ КЛАС
ОБЩООБРАЗОВАТЕЛНА ПОДГОТОВКА
КРАТКО ПРЕДСТАВЯНЕ НА УЧЕБНАТА ПРОГРАМА

Обучението по **математика** в XII клас е насочено към обобщаване на базисните знания, умения и отношения, свързани с постигане на изискванията за резултатите от обучението по учебен предмет **математика** и с изграждане на ключови компетентности на ученика.

Обучението по **математика** на ниво общообразователна подготовка е основа за обучението по **математика** на ниво профилирана подготовка.

ОЧАКВАНИ РЕЗУЛТАТИ В КРАЯ НА КЛАСА

Области на компетентности	**Знания, умения и отношения** ***В резултат на обучението си ученикът:***
Числа. Алгебра	• знае основни елементарни неравенства. • решава: – модулни уравнения и неравенства; – ирационални уравнения и неравенства с един радикал; – основни показателни уравнения и неравенства; – показателни уравнения, свеждащи се до квадратни чрез полагане; – основни логаритмични уравнения и неравенства; – логаритмични уравнения, свеждащи се до квадратни чрез полагане.
Фигури и тела	• умее да решава екстремални задачи за фигури.
Функции. Измерване	• използва свойствата на елементарните функции при решаване на екстремални задачи.
Логически знания	• прилага адекватно кванторите „за всяко“ и „съществува“ и понятията „необходимо условие“, „достатъчно условие“ и „необходимо и достатъчно условие“ в зависимост от ситуацията; • умее да образува отрицание на твърдение; • умее да обосновава изводи; • преценява вярност, рационалност и целесъобразност при избор на подход към решаването на проблем.
Елементи от вероятности и статистика	• умее графично да представя данните чрез хистограма и полигон; • знае да построява и интерпретира таблица на акумулираните честоти; • умее графично да представя акумулираните честоти; • умее да оценява вероятност на съставно (сложно) събитие.
Моделиране	• моделира геометрични ситуации със средствата на алгебрата и тригонометрията; • използва графични модели за интерпретиране на резултати от практически задачи

Годишен брой часове в десети клас – 31 учебни седмици по 2 учебни часа седмично = 62 часа

- При реализация на програмата спазването на хронологията в разпределението на съдържанието е задължително.
- Разпределението на съдържанието, включено в посочените в програмата подтеми (заглавия с двойна номерация), се прави по преценка на този, който я реализира (автори на учебници и учебни помагала, преподаватели).
- Необходимо е да се предвидят минимум 10% от годишния хорариум за систематичен преговор и обобщение по възлови теми от учебното съдържание.

ПРЕПОРЪЧИТЕЛНО ПРОЦЕНТНО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ НА ЗАДЪЛЖИТЕЛНИТЕ УЧЕБНИ ЧАСОВЕ ЗА ГОДИНАТА:

<table>
<tr><td>За нови знания</td><td>до 37 часа</td><td>до 60%</td></tr>
<tr><td>За упражнения</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">над 30%</td></tr>
<tr><td>За преговор</td></tr>
<tr><td>За обобщение</td></tr>
<tr><td>Практически дейности</td></tr>
<tr><td>За контрол и оценка (за входно и изходно ниво, за класни и за контролни работи и проекти)</td><td>до 6 часа</td><td>до 10%</td></tr>
</table>

СПЕЦИФИЧНИ МЕТОДИ И ФОРМИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ ПОСТИЖЕНИЯТА НА УЧЕНИЦИТЕ

Форми на оценяване:

Устно изпитване – оценяват се мнението и аргументите на ученика при решаването на конкретна математическа задача.

Писмено изпитване – оценява се постигането на стандартите чрез кратки писмени индивидуални или групови изпитвания.

Контролни и класни работи – оценява се постигането на стандартите за по-големи обособени фрагменти от учебното съдържание (в края на раздел, в края на учебния срок).

Практическа работа – изпълнение на домашна работа, разработка на проект и др.

СЪОТНОШЕНИЕ ПРИ ФОРМИРАНЕ НА СРОЧНА И ГОДИШНА ОЦЕНКА:

Оценки от устни изпитвания	15%
Оценки от писмени изпитвания	10%
Оценки от контролни и от класни работи	50%
Оценки от други участия (работа в час, изпълнение на домашни работи, работа по проекти и др.)	25%

ДЕЙНОСТИ ЗА ПРИДОБИВАНЕ НА КЛЮЧОВИТЕ КОМПЕТЕНТНОСТИ, КАКТО И МЕЖДУПРЕДМЕТНИ ВРЪЗКИ

Практически дейности, които могат да се реализират в класната стая:

- Да използват динамичен софтуер за моделиране и изследване на екстремални задачи.
- Да разчитат и интерпретират данни, зададени с таблици, графики и диаграми, което подпомага формирането на математическа компетентност, основни компетентности в областта на природните науки, инициативност и предприемчивост подпомага ученика при правилния му избор на бъдещето му образование.
- Да извършват и представят като проект статистически анализ на данни от анкета. Препоръчително е учениците да бъдат насърчавани да следят в публичните медии публикувани данни от маркетингови проучвания, да ги представят и анализират чрез изучените средства на понятийния апарат по статистика.
- Да умеят да подберат подходящ софтуерен продукт за подготовка на презентация.

Установяване на междупредметни връзки

- С информационните технологии – там, където е необходимо по-добро онагледяване на учебния процес или формиране на определени практически умения да се търсят възможности за провеждане на съвместни уроци, например при използване на конкретен динамичен софтуер.
- С физика и астрономия, химия и опазване на околната среда, биология и здравно образование и география и икономика при анализ на данни.

ПРИМЕРЕН ТЕСТ 1.

На задачите от 1 *до* 20 *включително посочете верния отговор.*

1. Числото $\left(\dfrac{2^3.3^2}{6^4}\right)^2$ е от интервала:

А) $(-\infty,\ 04)$

Б) $(3,\ \infty)$

В) $(6,\ \infty)$

Г) $(-3,\ 3)$

2. Кое от следните числа е с най-голям модул:

А) -2

Б) $\dfrac{5}{2}$

В) $-\sqrt{10}$

Г) 2,5

3. Равенството $x_1 + x_2 = 4$ е изпълнено за уравнението:

А) $x^2 - 5x + 3 = 0$

Б) $3x^2 + x - 1 = 0$

В) $-x^2 + 4x + 1 = 0$

Г) $x^2 + 4x - 1 = 0$

4. Кое от следните уравнения има корени с еднакви знаци

А) $x^2 - 5x + 2 = 0$

Б) $2x^2 + x - 2 = 0$

В) $x^2 + 4x + 5 = 0$

Г) $x^2 - 3x - 1 = 0$

5. Решенията на неравенството $\dfrac{x^2+2x+3}{1-x^2} > 0$ са:

А) $x \in (-\infty, -1)$

Б) $x \in (1, \infty)$

В) $x \in (-\infty, 1)$

Г) $x \in (-1, 1)$

6. Дефиниционната област на израза $\dfrac{x^2}{2\sqrt{x}-1}$ е:

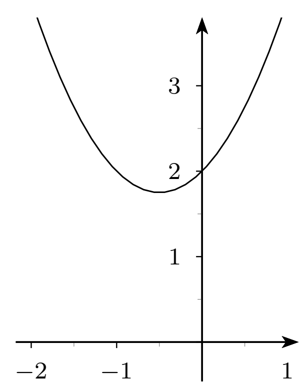
А) $\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right) \cup \left(\dfrac{1}{4},\ \infty\right)$

Б) $\left[0,\ \dfrac{1}{4}\right) \cup \left(\dfrac{1}{4},\ \infty\right)$

В) $(0,\ \infty)$

Г) $\left[\dfrac{1}{4},\ \infty\right)$

7. Параболата от чертежа е графика на функцията:



А) $y = -3x^2 + x - 1$

Б) $y = x^2 + x + 1$

В) $y = 2x^2 + 3x + 1$

Г) $y = x^2 + x + 2$

8. Стойността на израза

$$\frac{\cos 60^\circ \cos 15^\circ - \sin 60^\circ \sin(-15^\circ)}{2\sin 15^\circ . \cos(-15^\circ)} \text{ е :}$$

А) 1

Б) $-\sqrt{2}$

В) $\sqrt{2}$

Г) $\sqrt{3}$

9. Разликата d на аритметичната прогресия $\{a_n\}$, за която $a_2 = 4$ и $a_{12} = 20$, е:

А) 1

Б) 2

В) 3

Г) 4

10. Общият член на числова редица е $a_n = \sqrt{n^2 - 6n + 9} + 11$, $n \in \mathbb{N}$. Номерът n, за който a_n приема най-малка стойност, е:

А) 2

Б) 3

В) 4

Г) 5

11. От точката A вън от окръжността k са построени допирателна $AB = 8$ cm и секуща, която пресича k в точките C и D. Ако $AC = 4$ cm, то отсечката CD има дължина:

А) 10 cm

Б) 11 cm

В) 12 cm

Г) 14 cm

12. Даден е триъгълникът ABC $(AC > BC)$ с височина CH и медиана $CM = 5$ cm. Ако $\sphericalangle ACH = \sphericalangle BCM$, то радиусът на описаната около триъгълника ABC окръжност е:

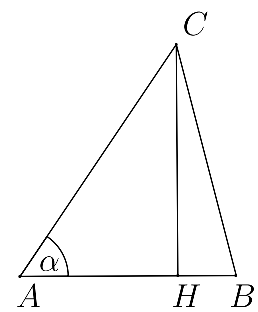
А) $\sqrt{5}$ cm

Б) 4 cm

В) $3\sqrt{2}$ cm

Г) 5 cm

13. На чертежа CH е височина към хипотенузата AB на правоъгълния триъгълник ABC. Ако $BC = 10$ cm, а $BH = 8$ cm, то $\operatorname{cotg}\alpha$ е равен на:



А) $\dfrac{4}{3}$

Б) $\dfrac{3}{4}$

В) $\dfrac{4}{5}$

Г) $\dfrac{3}{5}$

14. Равнобедрен триъгълник с ъгъл при основата 30° е вписан в окръжност с радиус 6 cm. Периметърът на триъгълника е равен на:

А) $12 + 6\sqrt{3}$ cm

Б) $6 + \sqrt{3}$ cm

В) $12 + 6\sqrt{2}$ cm

Г) $12 - 3\sqrt{2}$ cm

15. Медианата на статистическия ред 3, 3, 3, 4, 4, 8, 8, 7 е:

А) 3

Б) 4

В) 8

Г) 7

16. Ако $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$ и $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, то $\operatorname{cotg}\alpha$ е равен на:

А) 3

Б) 6

В) $\dfrac{12}{13}$

Г) $\dfrac{12}{5}$

ПРИМЕРЕН ТЕСТ 2.

На задачите от 1 до 20 включително посочете верния отговор.

1. Ако 8% от числото a е $\dfrac{24}{5}$, то числото a е:

А) 24

Б) 40

В) 60

Г) 84

2. Числото $9^{12}.3^{-8}.\left(\sqrt{3}\right)^{-6}\left(\sqrt[3]{9}\right)^{-18}$ е равно на:

А) 27

Б) 9

В) 3

Г) 1

3. Ако $3a = 2b + 1$ и $ab = 10$, стойността на израза $9a^2 + 4b^2$ е:

А) 121

Б) 119

В) 61

Г) 59

4. Стойността на израза $\log_3 5 + \log_3 0,2 + \log_{\sqrt{3}} \dfrac{1}{3}$ е равна на:

А) -2

Б) -1

В) $-\dfrac{1}{2}$

Г) 2

5. Числата $1+\sqrt{3}$ и $1-\sqrt{3}$ са корени на уравнението

А) $x^2-4x+2=0$

Б) $x^2-2x-2=0$

В) $x^2+4x-2=0$

Г) $x^2-2x+2=0$

6. Дефиниционното множество на израза $\dfrac{\sqrt{1-x}}{x}$ е:

А) $x\in(-\infty;1]$

Б) $x\neq 0$

В) $x\in(-\infty;0)\cup(0;1]$

Г) $x\in[1;\infty)$

7. Решенията на уравнението $\sqrt{x-2}=x-4$ са:

А) 3

Б) 3 и 6

В) 6

Г) 11

8. Решенията на неравенството $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}\geqq 0$ са:

А) $x\in(-\infty;-3)\cup(-1;3)\cup(3;\infty)$

Б) $x\in(-\infty;-3)\cup[-1;3)\cup(3;\infty)$

В) $x\in(-3;-1]$

Г) $x\in(-\infty;-3)\cup[-1;\infty)$

9. Броят на решенията на системата $\left| \begin{array}{l} x^2+y^2=\dfrac{5}{2}xy \\ x-y=\dfrac{1}{2}xy \end{array} \right.$ е:

А) 0

Б) 1

В) 2

Г) 3

10. Числата a, 1 и c в посочения ред са последователни членове на геометрична прогресия. Числата a, 2 и $3c$ в посочения ред са последователни членове на аритметична прогресия. Частното на геометричната прогресия е равно на:

А) $\dfrac{1}{2}$

Б) $\dfrac{1}{3}$

В) $\dfrac{2}{3}$

Г) $\dfrac{1}{4}$

11. Стефан забравил последните две цифри от телефонния номер на Стоян, но запомнил, че те са четни и са различни помежду си. Вероятността Стефан да набере верния телефонен номер на Стоян от първия опит е:

А) $\dfrac{1}{10}$

Б) $\dfrac{1}{16}$

В) $\dfrac{1}{20}$

Г) $\dfrac{1}{25}$

12. Модата на статистическия ред 9, 2, 9, 4, 3, 5, 3, 5, 6, 3, 7, 7, 8 е:

А) 3

Б) 4

В) 7

Г) 9

13. Стойността на израза $\sin 210^\circ + \operatorname{tg} 135^\circ$ е:

А) $-1,5$

Б) -1

В) $-0,5$

Г) $0,5$

14. Изразът $\sin\alpha\cos(90^\circ+\alpha)+\cos(-\alpha)\sin(90^\circ-\alpha)$ е тъждествено равен на:

А) -1

Б) 1

В) $\cos 2\alpha$

Г) $\sin 2\alpha$

15. Равнобедрен триъгълник с бедро 10 cm и основа 12 cm е описан около окръжност. Радиусът на окръжността е равен на:

А) 6, 25 cm

Б) $\dfrac{3}{2}$ cm

В) 3 cm

Г) 6 cm

16. В окръжност с радиус R е вписан равнобедрен триъгълник. Сумата от дължините на основата и височината на триъгълника е $2R$. Дължината на височината на триъгълника е равна на:.

А) $\frac{2}{5}R$

Б) $\frac{3}{4}R$

В) $\frac{R}{2}$

Г) $\frac{4}{5}R$

17. В триъгълника ABC отсечката, която свързва средите на страните AB и BC, е равна на 3, $BC = 10$ и $\sphericalangle C = 120°$. Страната AB е равна на:

А) 12

Б) 13

В) 14

Г) 15

18. В правоъгълен триъгълник с хипотенуза 6 cm радиусът на вписаната окръжност се отнася към радиуса на описаната окръжност както $(\sqrt{5} - 1) : 3$. Лицето на триъгълника е равно на:

А) $\sqrt{5}$ cm^2

Б) $2\sqrt{5}$ cm^2

В) $4\sqrt{5}$ cm^2

Г) $8\sqrt{5}$ cm^2

19. Четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност. Ако $CD = 10$ cm и $AB : BC : DA = 8 : 7 : 6$, то периметърът на четириъгълника е равен на:

А) 50 cm

Б) 52 cm

В) 54 cm

Г) 56 cm

20. Диагоналът на равнобедрен трапец е 2 cm, а ъгълът между този диагонал и голямата основа на трапеца е 30°. Лицето на трапеца е:

А) $\dfrac{3}{2}$ cm^2

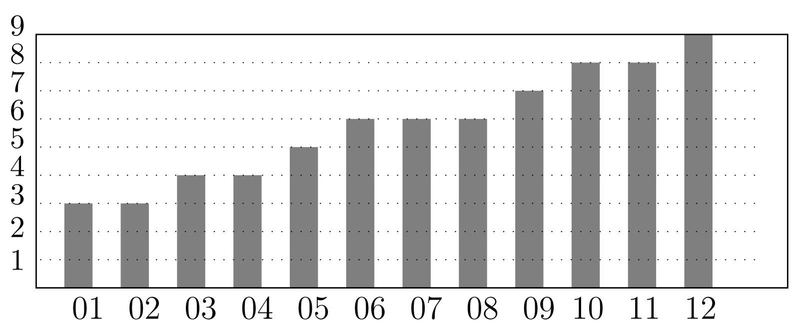
Б) $\sqrt{2}$ cm^2

В) $\sqrt{3}$ cm^2

Г) 4 cm^2

На задачите от 21 *до* 25 *включително запишете само верния отговор.*

21. На диаграмата е представен броят реализирани проекти на една фирма за месеците от една календарна година. Да се намери средният брой реализирани проекти на месец през тази година.



22. Да се намери лицето на триъгълника с върхове върха на параболата $f(x) = x^2 + 6x + 5$ и пресечните точки на графиката на функцията $f(x)$ с абсцисната ос.

23. В ромба $ABCD$ точката M е среда на страната AB и $\sphericalangle BAD = 60°$. Да се намери синусът на $\sphericalangle DMC$.

24. Да се реши системата $\left| \begin{array}{l} xy - 4x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = 17. \end{array} \right.$

25. В триъгълника ABC със страни $AC = 6$ cm и $AB = 14$ cm е построена ъглополовящата AL. Правата през L, успоредна на AB, пресича AC в точката P. Да се намери отсечката PL.

На задачите от 26 до 28 включително напишете пълните решения с необходимите обосновки.

26. Да се реши уравнението

$$\frac{7-x}{x-4}+\frac{1}{\sqrt{x}-2}=\frac{3}{\sqrt{x}+2}.$$

27. Ако ъглите на даден триъгълник са α, β и γ, да се докаже тъждеството

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}.$$

28. Най-малката страна на триъгълник се отнася към радиуса на описаната около него окръжност както 6 : 5, а другите му страни са съответно 20 cm и 21 cm. Да се намерят лицето и обиколката на триъгълника.

ПРИМЕРЕН ТЕСТ 3.

На задачите от 1 до 20 включително посочете верния отговор.

1. Стойността на израза $(2\sqrt{5})^2 - \sqrt[3]{125}$ е:

А) 15

Б) 10

В) 5

Г) $4\sqrt{5} - 5$

2. Решенията на неравенството $81 \cdot 3^x > \dfrac{1}{9}$ са:

А) $(-2; +\infty)$

Б) $(-6; +\infty)$

В) $(-\infty; -6)$

Г) $(-\infty; 6)$

3. Стойността на израза $\log_4 36 - 2\log_4 3$ е:

А) 0

Б) 1

В) 30

Г) 27

4. Коренът на уравнението $\log_3(1 - x) = 4$ принадлежи на интервала:

А) $(62; 64)$

Б) $(-81; 79)$

В) $(79; 81)$

Г) $(-12; 10)$

5. Допустимите стойности на израза $\sqrt{\dfrac{3+x}{x-1}}$ са:

А) $[-3;\,-1]$

Б) $[-3;\,-1)$

В) $(-\infty;\,-3] \cup (-1;\,+\infty)$

Г) $(-\infty;\,-3] \cup (1;\,+\infty)$

6. Най-малката стойност на функцията $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - x$ в интервала $[0;\,2]$ е:

А) 1

Б) $-0,75$

В) 2

Г) -1

7. Изразът $\sin(\alpha + 2\pi) + \mathrm{tg}\alpha \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$ е равен на:

А) $\sin\alpha + \cos\alpha$

Б) 0

В) $2\sin\alpha$

Г) $-\sin\alpha$

8. Множеството от решенията на уравнението $2\cos^2 x - 3\sin x = 0$ е:

А) $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Б) $(-1)^k\dfrac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

В) $\pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Г) $(-1)^k\dfrac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

9. Решенията на неравенството $\dfrac{5+x}{(x-7)(x-4)} \leq 0$ са:

А) $(-\infty;\ -5]$

Б) $[-5;\ 4) \cup (7;\ +\infty)$

В) $(-\infty;\ 7)$

Г) $(-\infty;\ -5] \cup (4;\ 7)$

10. Около остроъгълния триъгълник ABC е описана окръжност с център O и радиус $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$. Ако $BC = 5$, то $\sphericalangle BOC$ е равен на:

А) 150°

Б) 120°

В) 60°

Г) 30°

11. Даден е равнобедрен триъгълник с основа 6. Центърът на вписаната в триъгълника окръжност разделя височината към основата в отношение $3:2$, считано от върха на триъгълника. Дължината на бедрото на триъгълника е:

А) 4

Б) 4,5

В) 6

Г) 9

12. В трапец може да се впише окръжност, бедрата му са равни на 3 и 5, а средната основа го дели на две части, чиито лица се отнасят както $5:11$. По-малката основа на трапеца е равна на:

А) 1

Б) 1,2

В) 1,5

Г) 2

13. Сборът на третия и петия член на аритметична прогресия е 8. Сумата от първите седем члена на прогресията е:

А) 32

Б) 20

В) 28

Г) 24

14. Случайните събития A и B имат съответно вероятности $0,7$ и $0,5$. Известно е, че вероятността на събитието $A \cup B$ е $0,9$. Вероятността на събитието $A \cap B$ е:

А) $0,05$

Б) $0,2$

В) $0,3$

Г) $0,4$

15. Ако медианата на статистическия ред $2,\ 2,\ 5,\ 5,\ m,\ 6,\ 7,\ 8$ е равна на $5,5$, то средната стойност е:

А) 5

Б) $5,125$

В) $5,5$

Г) 6

16. Даден е равнобедрен трапец със средна основа 6. Косинусът на ъгъла между основата и диагонала е равен на $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ Лицето на трапеца е равно на:

А) 12

Б) $10\sqrt{10}$

В) $10,8\sqrt{10}$

Г) 108

17. Правилен шестоъгълник $ABCDEF$ е вписан в окръжност с радиус $2\sqrt{3}+2$. Радиусът на вписаната в триъгълника ACD окръжност е равен на:

А) 2

Б) $\sqrt{3}$

В) $2\sqrt{3}-2$

Г) 1

18. В правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза $AC = 20$ е построена медианата BM. Вписаната в триъгълника ABM окръжност се допира до BM в точка P. Ако $BP : PM = 3 : 2$, да се намери BC.

А) 12

Б) 15

В) 16

Г) 18

19. В равнобедрен триъгълник ABC с основа AC височините BE и CH се пресичат в точка K и $BH = 6$, а $KH = 3$. Да се намери лицето на триъгълника CBK.

А) 10

Б) 12

В) 15

Г) 20

20. В равнобедрен триъгълник PMK с основа MK е вписана окръжност с радиус $2\sqrt{3}$. Вписаната окръжност пресича височината PH в точка T, като $PT : TH = 1 : 2$. Да се намери обиколката на триъгълника PMK.

А) 36

Б) 30

В) 24

Г) 48

На задачите от 21 до 25 включително запишете само верния отговор.

21. Да се намери най-малкият корен на уравнението
$$2^{2x+1} - 7 \cdot 10^x + 5^{2x+1} = 0.$$

22. Да се намери най-малката цяла стойност на параметъра m, за която решението на системата $\begin{cases} 5x + 3y = 4, \\ y - 2x = 2m \end{cases}$ удовлетворява неравенството $x > -y$.

23. Точките A, B, C са от окръжност с радиус 2 и център O, а точката K е от допирателната към окръжността в точка B и $\sphericalangle AKC = 46^\circ$. Дължините на отсечките AK, BK и CK образуват в този ред растяща геометрична прогресия. Да се намери AC.

24. Каква е вероятността случайно избрано число от множеството на трицифрените числа, в чийто запис участват само нечетни цифри, да се дели на 9?

25. В окръжност са построени хордите AC и BD, които се пресичат в точка E. Допирателната към окръжността в точка B е успоредна на AC. Ако $EA : DA = 3 : 4$ и лицето на DCB е 16, да се намери лицето на BCE.

На задачите от 26 до 28 включително напишете пълните решения с необходимите обосновки.

26. За кои стойности на параметъра a сборът на $\log_a(\cos^2 x + 1)$ и $\log_a(\cos^2 x + 5)$ е равен на 1 за поне една стойност на x?

27. Бедрото на равнобедрения триъгълник ABC е 15, а лицето му е 67,5. Към основата AC и към страната BC са построени височините BE и AH, които се пресичат в точка O. Да се намери лицето на триъгълника BOH.

28. При $x \in [-2; 3]$ и $y \in [0; 11]$ да се намери най-голямата стойност на израза
$$\sqrt{(x-1)(y-x)} + \sqrt{(7-y)(1-x)} + \sqrt{(x-y)(y-7)}.$$

ОТГОВОРИ

ПРИМЕРЕН ТЕСТ 1.

1. Г; **2.** В; **3.** В; **4.** А; **5.** Г; **6.** Б; **7.** Г; **8.** В; **9.** Б; **10.** Б; **11.** В; **12.** Г; **13.** Б; **14.** А; **15.** А; **16.** Г; **17.** Г; **18.** В; **19.** Г; **20.** В; **21.** $x_{1,2} = \pm 3$; **22.** $6\sqrt{5}$ cm; **23.** 210; **24.** $a_1 = -70$, $d = 10$; **25.** $x = 4$; **26.** $\dfrac{R\sqrt{\pi+4} \pm R\sqrt{4-\pi}}{2}$; **27.** $\dfrac{a+b}{b}$; **28.** $0,5$.

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ 26 ДО 28

26. Означаваме страните на правоъгълника с a и b. Тогава диагоналът на правоъгълника е $\sqrt{a^2+b^2}$, т. е. $a^2 + b^2 = 4R^2$. Лицето на кръга е $\pi R^2 = 2ab$. Получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 4R^2 \\ \pi R^2 = 2ab. \end{array} \right.$$

Решаваме тази система и получаваме

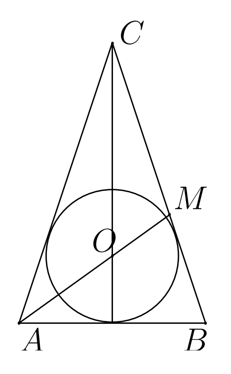
$$b = \frac{R\sqrt{\pi+4} \pm R\sqrt{4-\pi}}{2}, \; a = \frac{R\sqrt{\pi+4} \mp R\sqrt{4-\pi}}{2}.$$

Следователно страните на правоъгълника са $\dfrac{R\sqrt{\pi+4} \pm R\sqrt{4-\pi}}{2}$.

27. Означаваме с O центъра на вписаната окръжност и с AM ($M \in BC$) ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$. Понеже CO е ъглополовяща на $\sphericalangle ACM$ в $\triangle AMC$, то

$$\frac{AO}{OM} = \frac{AC}{CM} = \frac{BC}{CM} = \frac{CM+BM}{CM} =$$

$$1 + \frac{BM}{CM} = 1 + \frac{AB}{AC} = 1 + \frac{a}{b} = \frac{a+b}{b}.$$



28. Броят на трицифрените числа, образувани от четирите цифри, е $V_4^3 = 4.3.2 = 24$. Трицифрените числа, образувани с тези цифри, се делят на 3, само ако сборът от цифрите им се дели на 3. Възможностите са две:

числата, образувани от цифрите 1, 2, 6 или от цифрите 1, 2, 9. Броят на трицифрените числа, образувани от цифрите 1, 2 и 6, е $P = 3! = 6$. Аналогично намираме, че броят на трицифрените числа, образувани от цифрите 1, 2 и 9, е 6. Общият брой на благоприятните случай е $6+6 = 12$. Тогава търсената вероятност е $P = \dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2}$.

ПРИМЕРЕН ТЕСТ 2.

1. В); **2.** В); **3.** А); **4.** А); **5.** Б); **6.** В); **7.** В); **8.** Б); **9.** Г); **10.** Б); **11.** В); **12.** А); **13.** А); **14.** В); **15.** В); **16.** А); **17.** В); **18.** В); **19.** Б); **20.** В); **21.** 5,75; **22.** 8; **23.** $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$; **24.** $(1;\ 4), (-1,\ 4)$ и $(-1,\ -4)$; **25.** 4,2 cm.

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ 26 ДО 28

26. Имаме $x \geqq 0$, $x \neq 4$. Имаме

$$\frac{7-x}{x-4} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-4} = \frac{3(\sqrt{x}-2)}{x-4} \Longrightarrow 7 - x + \sqrt{x} + 2 = 3\sqrt{x} - 6 \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x} = 15 - x \Rightarrow x \leq 15.$$

Вдигаме на квадрат и получаваме квадратното уравнение

$$x^2 - 34x + 225 = 0$$

с корени $x_1 = 9$ и $x_2 = 25$. Тъй като $x_2 = 25 > 15 \Rightarrow x_2 = 25$ не е решение, единственото решение на уравнението е $x = 9$.

27. Като използваме формулите за сбор на два синуса и сбор на два косинуса, получаваме

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Тъй като α, β и γ са ъгли в триъгълник, то

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} \Longrightarrow \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{tg}\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2},$$

с което тъждеството е доказано.

28. Нека най-малката страна в триъгълника е a и срещу нея лежи ъгъл α. От синусовата теорема получаваме

$$\frac{a}{R} = 2\sin\alpha \Longrightarrow \frac{6}{5} = 2\sin\alpha \iff \sin\alpha = \frac{3}{5}.$$

Тогава лицето на триъгълника е

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 21\cdot\frac{3}{5} = 126 \text{ cm}^2.$$

От основното тригонометрично тъждество имаме

$$\cos^2\alpha - 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

Тъй като α е ъгълът срещу най-малката страна в триъгълника, то α е остър ъгъл, следователтелно $\cos\alpha > 0$ и от горното равенство намираме $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. От косинусовата теорема получаваме

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = 20^2 + 21^2 - 2\cdot 20\cdot 21\cdot\frac{4}{5} = 169 \Longrightarrow a = 13 \text{ cm}.$$

Обиколката на триъгълника е $P = 20 + 21 + 13 = 54$ cm.

ПРИМЕРЕН ТЕСТ 3.

1. А); **2.** Б); **3.** Б); **4.** Б); **5.** Г); **6.** Б); **7.** В); **8.** Б); **9.** Г); **10.** Б); **11.** Б); **12.** А); **13.** В); **14.** В); **15.** Б); **16.** А); **17.** А); **18.** В); **19.** В); **20.** А); **21**. -1; **22**. -2; **23**. $4\sin 67^\circ$; **24**. $\frac{11}{125}$; **25**. 9.

26. Тъй като $\cos^2 x + 1 > 0$ и $\cos^2 x + 5 > 0$, имаме

$$\log_a(\cos^2 x + 1) + \log_a(\cos^2 x + 5) = 1 \Leftrightarrow \log_a((\cos^2 x + 1)(\cos^2 x + 5)) = 1,$$

т.е. $\log_a(\cos^4 x + 6\cos^2 x + 5) = 1$. При $0 < a \neq 1$ разглеждаме уравнението

$$\cos^4 x + 6\cos^2 x + 5 = a.$$

То има решение, когато a принадлежи на множеството от стойностите на $\cos^4 x + 6\cos^2 x + 5$, което е множеството от стойностите на квадратната функция $g(t) = t^2 + 6t + 5$ при $t \in [0;\ 1]$.

Върхът на параболата $g(t) = t^2 + 6t + 5$ има абсциса $t_0 = -3 < 0$, следователно в интервала $[0;\ 1]$ функцията $g(t)$ е растяща. В този интервал множеството от стойностите на $g(t)$ е $[g(0);\ g(1)]$, т.е. $[5;\ 12]$.

Търсените стойности са $a \in [5;\ 12]$.

27. Имаме $AH = \dfrac{2 \cdot 67,5}{15} = 9$. От правоъгълния триъгълник AHB намираме $BH = \sqrt{225 - 81} = 12$. Оттук $HC = 3$. Тогава $S_{ACH} = \dfrac{27}{2}$. Тъй като

$$\sphericalangle AOE = \sphericalangle BOH \Rightarrow \sphericalangle CAH = \sphericalangle OBH,$$

то $\Delta BOH \sim \Delta ACH$, откъдето

$$S_{BOH} = S_{ACH} \cdot \frac{BH^2}{AH^2} = \frac{27 \cdot 144}{2 \cdot 81} = 24.$$

28. Коренуваните изрази $(x-1)(y-x)$, $(7-y)(1-x)$ и $(x-y)(y-7)$ са неотрицателни, а произведението им е

$$-(x-1)^2(y-x)^2(7-y)^2 \leqq 0.$$

Следователно

$$(x-1)(y-x)(7-y) = 0,$$

т.е. $x = 1$, $x = y$ или $y = 7$.

При $x = 1$ изразът става $\sqrt{(1-y)(y-7)}$. Дефиниционното множество и условието водят до ограничението $y \in [1; 7]$. В този интервал функцията $f(y) = (1-y)(y-7)$ има максимум $f(4) = 9$, т.е. най-голямата стойност на дадения израз е 3.

При $x = y$ изразът става $\sqrt{(7-x)(1-x)}$. Дефиниционното множество и условието водят до ограничението $x \in [0; 1]$. В този интервал функцията $g(x) = (1-x)(7-x)$ има максимум $g(0) = 7$, т.е. най-голямата стойност на дадения израз е $\sqrt{7}$.

При $y = 7$ изразът става $\sqrt{(x-1)(7-x)}$. Дефиниционното множество и условието водят до ограничението $y \in [1; 3]$. В този интервал функцията $f(x) = (x-1)(7-x)$ има максимум $f(3) = 8$, т.е. най-голямата стойност на дадения израз е $2\sqrt{2}$.

Следователно търсената най-голяма стойност е 3.

КНИГА ЗА УЧИТЕЛЯ
МАТЕМАТИКА
за 12. клас

Автори
Емил Колев
Иван Георгиев
Стелиана Кокинова

Редактор
Невена Събева

Графичен дизайн
Петко Минчев

Коректор
Мила Томанова

Българска. Първо издание, 2021 г.
Формат 60x90/8. Печатни коли 6
ISBN 978-954-18-1612-7

Издател

„КЛЕТ БЪЛГАРИЯ“ ООД
София 1574, ул. „Никола Тесла“ № 5, BSR 2, етаж 4
тел.: 0700 47 400, e-mail: info@klett.bg
www.klett.bg