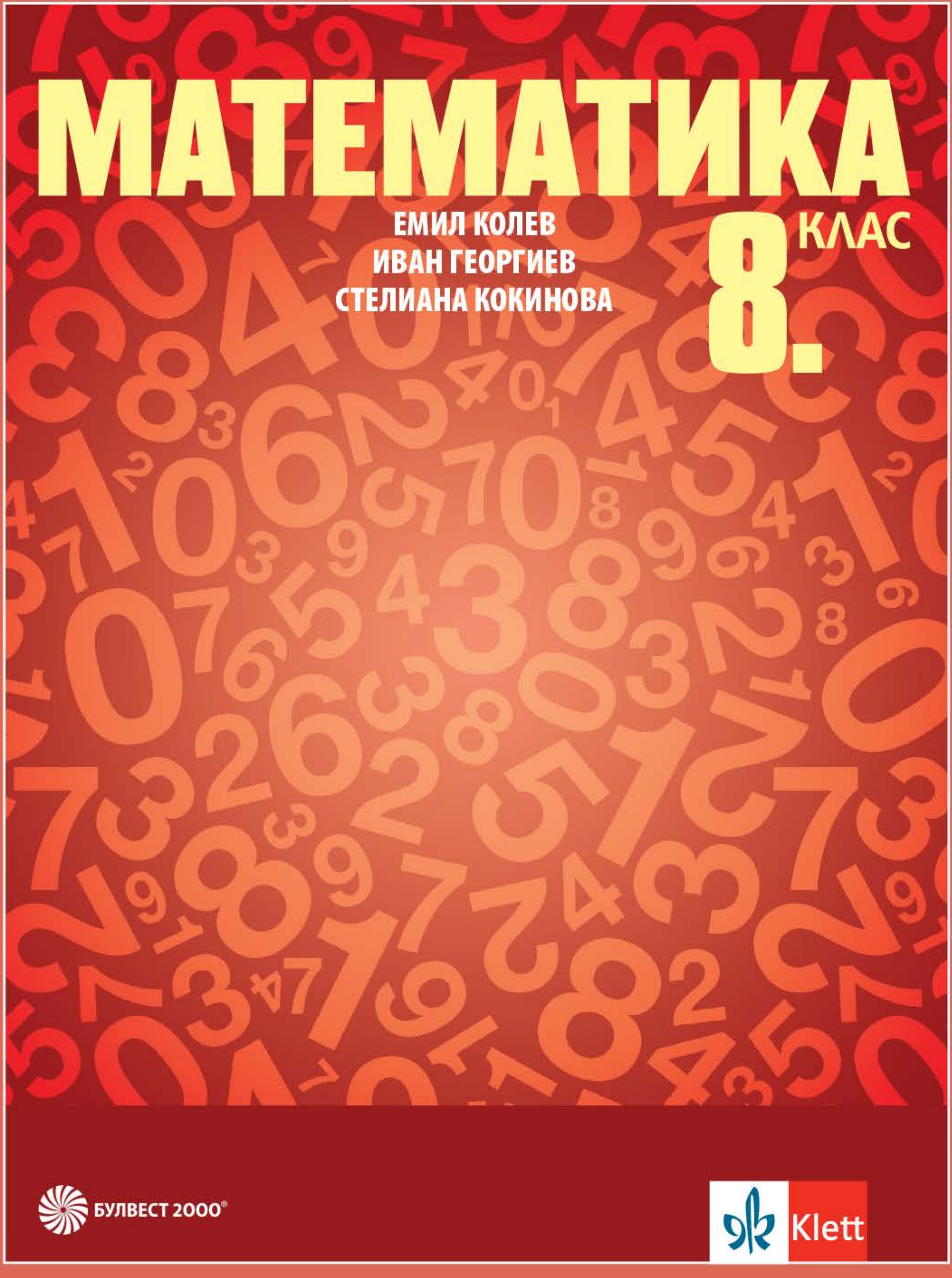
КНИГА ЗА УЧИТЕЛЯ



БУЛВЕСТ 2000®

Klett

Книга за учителя
по математика за 8. клас

Автори
© Емил Миланов Колев, 2024 г.
© Стелиана Миткова Кокинова, 2024 г.
© Иван Георгиев Георгиев, 2024 г.

Графичен дизайн и корица
© Николай Йорданов Пекарев, 2017 г.

Издател
© „КЛЕТ БЪЛГАРИЯ“ ООД, 2024 г.
ISBN 978-954-18-1061-3

Настоящата книга за учителя е разработена с цел да подпомогне преподавателите по математика в съответствие с учебната програма за 8. клас.

Обучението по математика в 8. клас е насочено към овладяване на базисни знания, умения и отношения, свързани с постигане на изискванията за резултатите от обучението по учебния предмет математика и с изграждане на ключови компетентности на ученика.

Според учебната програма за 8. клас, областите на компетентности са:

Числа. Алгебра

• Сравнява реални числа и извършва операциите събиране, изваждане, умножение, деление и степенуване;

• Пресмята числови изрази в множеството на реалните числа;

• Извършва тъждествени преобразувания на рационални и ирационални изрази (съдържащи квадратни корени);

• Умее да решава квадратни уравнения по формулата за намиране на корените им;

• Умее да прилага формулите за връзка между корени и коефициенти на квадратно уравнение;

• Умее да решава дробни уравнения, свеждащи се до линейни и квадратни.

Фигури и тела

• Знае основните равнинни геометрични фигури: триъгълник, четириъгълник, правилен многоъгълник и окръжност;

• Знае основните забележителни точки в триъгълник и може да прилага техните свойства;

• Знае взаимното положение на прави и окръжности и може да прилага техните свойства;

• Определя по вид и намира ъгли, свързани с окръжност, познава вписани и описани многоъгълници.

Функции. Измерване

• Дели отсечка в дадено отношение в конкретни ситуации.

Основни акценти в учебника по математика и работата на учителя с него

Учебникът е структуриран по теми и уроци. Изложението на учебното съдържание следва последователността в разпределението на темите в учебната програма. Обемът на една урочна единица е съответен на продължителността на един учебен час.

Разработени са 106 урока в 10 теми:

1. Начален преговор;
2. Основни комбинаторни понятия;
3. Вектори;
4. Триъгълник и трапец;
5. Квадратен корен;
6. Квадратни уравнения;
7. Окръжност;
8. Рационални изрази;
9. Вписани и описани многоъгълници;
10. Годишен преговор.

Урочните единици във всяка тема следват логическата последователност за въвеждане на новите понятия, дефиниции и знания и за изграждане на необходимите компетентности. За лесно усвояване на новите знания използваната структура на урочните единици са идентични. Основен стремеж при разработване на всеки урок е лесното възприемане и запомняне на дефинициите, новите понятия и правилата за решаване. Решенията на задачите от урока са подробни, като целта е да се илюстрират основните правила и методи за решаване, както и модел за записване на решението. В уроците за упражнение се припомнят основните факти и правила и приложенията им за решаване на съответните типове задачи.

12. СЪБИРАНЕ И ИЗВАЖДАНЕ НА ВЕКТОРИ. СВОЙСТВА

Вид на урока: За нови знания

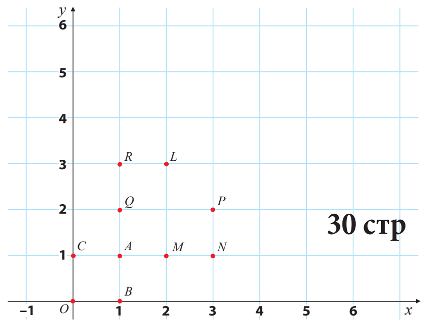
Цел: Въвеждане и усвояване на действията сбор и разлика на вектори.

Първо може да се обърне внимание на това, че броят на различните точки е равен на броят на двуцифрените числа, записани с различни цифри.

Да се обърне внимание на това, че за да са равни два вектора те трябва да са еднопосочни и да имат равни дължини.

Да се обърне внимание на факта, че за произволен вектор $\vec{b}$ и произволна точка X съществува единствена точка Y, за която $\overrightarrow{XY} = \vec{b}$. Това свойство помага да събираме вектори, зададени по произволен начин, като „пренесем“ втория вектор така, че началото му да съвпадне с края на първия вектор.

12. СЪБИРАНЕ И ИЗВАЖДАНЕ НА ВЕКТОРИ. СВОЙСТВА



1 На три картончета са написани цифрите 1, 2 и 3 и са сложени в шапка. От шапката се изваждат две картончета едно след друго и така се образуват координатите на точка, като първото картонче е за абсцисата, а второто – за ординатата.

а) Ако след всяко изваждане картончетата се връщат в шапката, след като точката е отбелязана в правоъгълна координатна система, то колко различни точки най-много може да построим? Напишете координатите им.

б) Най-късно след кое изваждане на картончета ще започнем да повтаряме някоя от отбелязаните точки?

Решение: а) Начините, по които от цифрите 1, 2 и 3 можем да образуваме наредена двойка от различни числа, са 6 и те са:

$Q\,(1;2)$, $R\,(1;3)$, $M\,(2;1)$, $L\,(2;3)$, $N\,(3;1)$ и $P\,(3;2)$.

б) Най-късно след шестото изваждане.

ЩЕ НАУЧИТЕ

- *Как се събират и изваждат вектори*

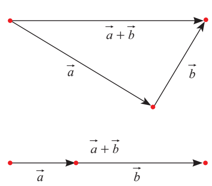
2 В координатна система са построени точките $A(1;1)$, $B(1;0)$ и $C(0;1)$. Колко вектора с начало и край от точките от задача 1 ще са:

а) равни с $\overrightarrow{AB}$; б) противопосочни с $\overrightarrow{CO}$;
в) еднопосочни с $\overrightarrow{CA}$; г) равни на $\overrightarrow{OA}$?

Решение: а) Равни на $\overrightarrow{AB}$ са векторите $\overrightarrow{PN}$ и $\overrightarrow{RQ}$.
б) Противопосочни с $\overrightarrow{CO}$ са векторите $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{ML}$ и $\overrightarrow{QR}$.
в) Еднопосочни с $\overrightarrow{CA}$ са векторите $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{QP}$ и $\overrightarrow{RL}$.
г) Равни на $\overrightarrow{OA}$ са векторите $\overrightarrow{QL}$ и $\overrightarrow{MP}$.

„Преместването“ от O до A, като минем през B, бихме могли да разглеждаме като резултат от сбора от преместванията $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{BA}$, т.е.

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}.$$

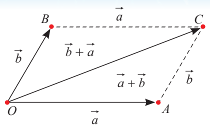


СБОР НА ДВА ВЕКТОРА

Сборът на два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, при които краят на първия вектор е начало на втория вектор, е вектор с начало началото на първия и край – краят на втория вектор.

Описаното в определението правило за сбор на два вектора се нарича **правило на триъгълника**.

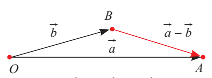
30



Когато търсим сбора на два вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ с общо начало, постъпваме по следния начин: построяваме успоредник $OACB$ и „заместваме“ вектора $\overrightarrow{OB}$ с равния му вектор $\overrightarrow{AC}$. Тогава:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}.$$

Това правило се нарича **правило на успоредника**.



$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$

РАЗЛИКА НА ВЕКТОРИ

Разликата $\vec{a}-\vec{b}$ на два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се нарича векторът $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$.

Да се коментира, че $-\vec{b}$ е противоположния вектор на $\vec{b}$, т.е. вектор със същата големина, но с противоположна посока. На практика намирането на разлика на два вектора се свежда до намиране на сбор на два вектора.

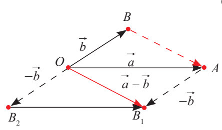
Ако двата вектора са с общо начало, тяхната разлика намираме по следния начин:

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BA}.$$

Когато изваждаме вектори с общо начало, разликата се намира по следното правило:

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}.$$

Намирането на разлика на два вектора с общо начало се определя лесно по даденото правило.



$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{BA}$

За произволни вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са изпълнени равенствата:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \qquad \vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$$

$$\vec{a}+\vec{o}=\vec{a} \qquad \vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{o}.$$

ЗАДАЧИ

1. Като използвате чертежа от задача 1, намерете: $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NP}$; $\overrightarrow{LP}+\overrightarrow{ML}$; $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QP}$.

2. Вярно ли е, че ако:

а) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, то $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\uparrow\uparrow\vec{a}$;

б) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, то $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\uparrow\uparrow\vec{b}$?

3. На чертежа са построени вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$ и $\vec{h}$. В дясната страна на всяко от равенствата е записан вектор, който е резултат от действията в лявата страна на тези равенства. Проверете верността на равенствата.

1) $\vec{b}+\vec{f}=\vec{h}$ 2) $\vec{e}+\vec{h}=\vec{g}$

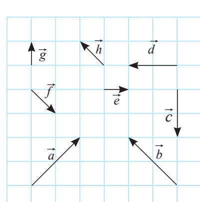
3) $\vec{f}+\vec{h}=\vec{o}$ 4) $\vec{e}-\vec{f}=\vec{g}$

5) $\vec{b}-\vec{h}=\vec{h}$ 6) $\vec{d}-\vec{c}=\vec{b}$

7) $\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{o}$ 8) $\vec{e}+\vec{b}-\vec{h}=\vec{g}$

9) $\vec{d}-\vec{c}+\vec{f}=\vec{h}$

10) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{f}=\vec{h}$



Възможност за работа по групи за всеки един от примерите и обсъждане на начина за решаването им.

Възможност за диференцирана и индивидуална работа с част от примерите.

31

Обсъждане на задачата. Възможност за оценяване.

88. ОПИСАНА И ВПИСАНА ОКРЪЖНОСТ. УПРАЖНЕНИЕ

Вид на урока: Упражнение

Цел: Да се упражнят необходимите и достатъчни условия за вписани и описани триъгълници.

Означенията за страните a, b и c, ъглите α, β, γ и центровете на описаната окръжност O и на вписаната окръжност I са стандартни означения и е препоръчително да не се използват за други означения.

Големината на $\sphericalangle AIB = 90° + \frac{1}{2}\gamma$ зависи само от ъгъла γ при върха C.

Големината на $\sphericalangle BOC = 2\alpha$ зависи само от ъгъла α при върха A.

88. ОПИСАНА И ВПИСАНА ОКРЪЖНОСТ. УПРАЖНЕНИЕ

ЩЕ УПРАЖНИТЕ

- *Свойствата на описаната и вписаната окръжност*

Ще използваме стандартните означения за елементите на триъгълник ABC.

страни – $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$

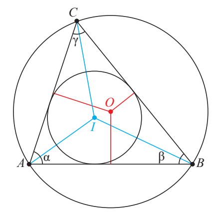
ъгли – $\sphericalangle BAC = \alpha, \sphericalangle ABC = \beta, \sphericalangle ACB = \gamma$

център на описаната окръжност – O

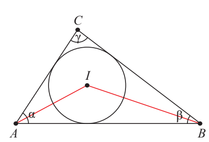
Точка O е пресечна точка на симетралите на триъгълника.

център на вписаната окръжност – I

Точка I е пресечна точка на ъглополовящите на триъгълника.



1 Докажете, че $\sphericalangle AIB = 90° + \frac{1}{2}\gamma$.



Решение: Тъй като AI е ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$ и BI е ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$, то:

$$\sphericalangle BAI = \frac{1}{2}\alpha \text{ и } \sphericalangle ABI = \frac{1}{2}\beta.$$

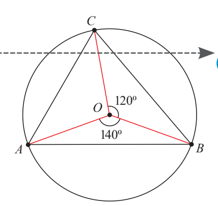
Тогава

$$\sphericalangle BAI + \sphericalangle ABI = \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}(180° - \gamma) = 90° - \frac{1}{2}\gamma.$$

От триъгълник ABI получаваме

$$\sphericalangle AIB = 180° - (\sphericalangle ABI + \sphericalangle BAI) = 180° - \left(90° - \frac{1}{2}\gamma\right) = 90° + \frac{1}{2}\gamma.$$

2 Намерете ъглите α, β и γ, ако $\sphericalangle AOB = 140°$ и $\sphericalangle BOC = 120°$.



Решение: Тъй като $\sphericalangle AOB = 2\gamma$, то $\gamma = 70°$. Аналогично от $\sphericalangle BOC = 2\alpha$ следва, че $\alpha = 60°$. За ъгъл β пресмятаме:

$$\beta = 180° - (\alpha+\beta) = 180° - (70° + 60°) = 50°.$$

184

88. ОПИСАНА И ВПИСАНА ОКРЪЖНОСТ. УПРАЖНЕНИЕ

3 Ако $\sphericalangle AIB = \sphericalangle AOB$, намерете ъгъл γ.

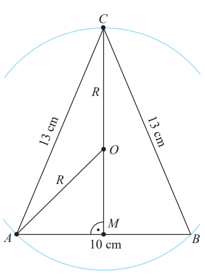
Решение: От задача 1 знаем, че $\sphericalangle AIB = 90° + \frac{1}{2}\gamma$.
Освен това $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB = 2\gamma$, откъдето получаваме:

$$90° + \frac{1}{2}\gamma = 2\gamma.$$

Решението на това уравнение е $\gamma = 60°$.

За правоъгълен триъгълник с катети a, b и хипотенуза c е изпълнено равенството $a^2 + b^2 = c^2$, което се нарича **питагорова теорема**.

Някои питагорови тройки: (3,4,5), (5,12,13), (8,15,17), (7,24,25).



4 Намерете радиуса на описаната окръжност на триъгълник ABC, за който $AC = BC = 13$ cm и $AB = 10$ cm.

Решение: Нека M е средата на AB. От питагоровата теорема за триъгълник AMC получаваме:

$$CM^2 = AC^2 - AM^2 = 144, \text{ т.е. } CM = 12 \text{ cm}.$$

Ако описаната окръжност има център O и радиус R, то

$$MO = CM - R = 12 - R.$$

От питагоровата теорема за триъгълник AMO получаваме:

$R^2 = 5^2 + (12 - R)^2$, откъдето $R = \frac{169}{24}$ cm.

Височината в равнобедрен триъгълник може да се намери, като се използва питагоровата теорема.

ЗАДАЧИ

1. Ако $\sphericalangle AIB = 110°$, то ъгъл γ е равен на:
А) 20° Б) 40°
В) 50° Г) 60°

2. Ако $\sphericalangle BOC = 90°$, то ъгъл α е равен на:
А) 30° Б) 45°
В) 50° Г) 75°

3. Правоъгълен триъгълник има страни 7 cm, 24 cm и 25 cm. Намерете радиуса на описаната окръжност R и радиуса на вписаната окръжност r.

4. Намерете ъглите α, β и γ, ако $\sphericalangle AIB = 120°$ и $\sphericalangle BIC = 140°$.

5. Даден е триъгълник със страни $a = 33$ m, $b = 42$ m и $c = 37$ m. Вписаната окръжност се допира до страните AB, BC и CA съответно в точките C_1, A_1 и B_1. Намерете дължините на отсечките AB_1, AC_1, CA_1, CB_1, BA_1 и BC_1.

6. Точка M е среда на дъгата AB, която не съдържа точката C, от описаната окръжност на триъгълник ABC. Докажете, че $MA = MB = MI$, където I е центърът на вписаната окръжност в триъгълник ABC.

185

Обсъждане на задачата. Възможност за демонстрация с електроните ресурси.

Подходящи са за индивидуална домашна работа.

Обсъждане на задачата – подходяща е за домашна работа. Възможност за устно изпитване.

Подходяща е за домашна работа.

Самостоятелна работа на базата на задача 2. от урока. Възможност за оценяване.

Обсъждане на задачата и самостоятелна работа. Подходяща е за домашна работа или за оценяване.

70. ОКРЪЖНОСТ. ОБОБЩЕНИЕ

Вид на урока: Обобщение
Цел: Да се обобщят основните свойства на хорди в окръжност и видовете ъгли в окръжност.

Двете допирателни от точка към окръжност са равни.

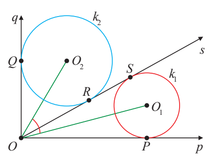
Медианата в правоъгълен триъгълник е равна на половината от хипотенузата. Следователно центърът на описаната окръжност за правоъгълен триъгълник е средата на хипотенузата. Вписани ъгли, които се измерват с една и съща дъга са равни.

Диаметърът, перпендикулярен на хорда, разполовява съответните на тази хорда дъги. Периферен ъгъл се измерва с половината на съответната му дъга.

70. ОКРЪЖНОСТ. ОБОБЩЕНИЕ

ЩЕ СИ ПРИПОМНИТЕ

- *Свойствата на хордата в окръжност*
- *Свойствата на видовете ъгли в окръжност*



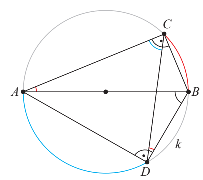
1 Във вътрешността на $\sphericalangle pOq = 90°$ е построен произволен лъч $\overrightarrow{Os}$. Окръжностите $k_1(O_1)$ и $k_2(O_2)$ се допират съответно до раменете на $\sphericalangle pOs$ и $\sphericalangle qOs$, като P и S са допирните точки на k_1 с $\overrightarrow{Op}$ и $\overrightarrow{Os}$, а Q и R са допирните точки на k_2 с $\overrightarrow{Oq}$ и $\overrightarrow{Os}$. Намерете:
а) градусната мярка на $\sphericalangle O_1OO_2$;
б) дължината на отсечката RS, ако $OP = 6$ cm и $OQ = 4$ cm.

Решение: а) От свойството на допирателните от външна точка за окръжност следва, че OO_1 и OO_2 са ъглополовящи съответно на $\sphericalangle pOs$ и $\sphericalangle qOs$.

Тогава $\sphericalangle O_1OO_2 = \frac{1}{2}\sphericalangle pOs + \frac{1}{2}\sphericalangle qOs = \frac{1}{2}\sphericalangle pOq = \frac{1}{2}.90° = 45°$.

б) От $OP = OS$ и $OR = OQ$ (допирателни отсечки към k_1 и k_2) следва, че

$$RS = OS - OR = OP - OQ = 6 - 4 = 2 \text{ cm}.$$

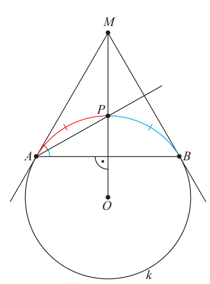


2 Отсечката AB е хипотенуза на правоъгълните триъгълници ABC и ABD, като върховете C и D лежат в двете различни части от равнината относно правата AB. Докажете, че $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$ и $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$.

Решение: От $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90°$ следва, че точките A, B, C и D лежат на окръжност k с диаметър AB. Тогава

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} \text{ и } \sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$$

като вписани ъгли в k.



3 В окръжност $k(O)$ мерките на съответните дъги на хорда AB се отнасят както 1:2. Допирателните на k през точките A и B се пресичат в точка M. Правата MO пресича k в точка P, като P е между M и O. Докажете, че:
а) ΔAMB е равностранен; б) правата AP е симетрала на отсечката MB.

Решение: а) От $\overset{\frown}{APB} : \overset{\frown}{AB} = 1:2$ и $\overset{\frown}{APB} + \overset{\frown}{AB} = 360°$ следва, че $\overset{\frown}{APB} = 120°$,

$$\overset{\frown}{AB} = 240° \text{ и } \sphericalangle AMB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{APB}) = \frac{1}{2}(240° - 120°) = 60°.$$

От $MA = MB$ и $\sphericalangle AMB = 60°$ следва, че ΔAMB е равностранен.
б) Тъй като $\overrightarrow{MO}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle AMB$, то $MO \perp AB$ и $\overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{PB}$. Тогава

$$\sphericalangle MAP = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AP}, \ \sphericalangle BAP = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BP}, \ \sphericalangle MAP = \sphericalangle BAP$$

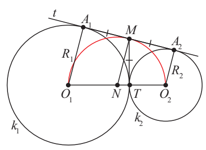
и $\overrightarrow{AP}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle BAM$.
Но в равностранния ΔAMB ъглополовящата е и височина, и медиана. Следователно правата AP е симетрала на отсечката MB.

148

4 Дадени са две външно допирателни окръжности $k_1(O_1; R_1)$ и $k_2(O_2; R_2)$ $(R_1 > R_2)$ с обща външна допирателна t. Общата им вътрешна допирателна пресича t в точка M, а N е средата на O_1O_2. Докажете, че:

а) $MN = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$;

б) окръжността с диаметър O_1O_2 се допира до t в точка M.



Решение: а) Означаваме с T общата точка на k_1 и k_2, а с A_1 и A_2 – допирните точки на t с двете окръжности.

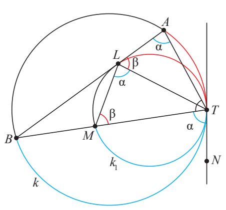
От $MT = MA_1$ и $MT = MA_2$ следва, че $MA_1 = MA_2$. В трапеца $A_1O_1\,O_2A_2$ отсечката MN е средна основа, $MN \parallel A_1O_1$ и

$$MN = \frac{1}{2}(A_1O_1 + A_2O_2) = \frac{1}{2}(R_1 + R_2).$$

б) От $MN \parallel A_1O_1$ и $A_1O_1 \perp t$ следва, че $MN \perp t$. Окръжността $k\left(N;\, R = \frac{R_1 + R_2}{2}\right)$ се допира до t в точка M, тъй като $MN \perp t$ и $MN = R = \frac{1}{2}O_1O_2$.

Разстоянието между центровете на външно допирателни окръжности е равно на сбора от двата радиуса. Триъгълниците A_1TA_2 и O_1MO_2 са правоъгълни.

5* Дадени са две вътрешно допирателни окръжности с обща точка T. През произволна точка L на малката окръжност е построена допирателна, която пресича голямата окръжност в точки A и B. Докажете, че TL е ъглополовяща на $\sphericalangle ATB$.



Решение: Нека k и k_1 са две вътрешно допирателни окръжности, TN е общата им допирателна, а TB пресича k_1 в точка M.

От $\sphericalangle TAB = \frac{\overset{\frown}{BT}}{2}$ и $\sphericalangle NTB = \frac{\overset{\frown}{BT}}{2}$ следва, че

$$\sphericalangle TAB = \sphericalangle NTB = \alpha.$$

Аналогично от $\sphericalangle TLM = \frac{\overset{\frown}{MT}}{2}$ и $\sphericalangle NTM = \frac{\overset{\frown}{MT}}{2}$ следва, че

$$\sphericalangle TLM = \alpha.$$

От друга страна, $\sphericalangle LMT = \frac{\overset{\frown}{LT}}{2}$, $\sphericalangle ALT = \frac{\overset{\frown}{LT}}{2}$ и $\sphericalangle LMT = \sphericalangle ALT = \beta$.

Триъгълниците ALT и LMT имат по два равни ъгъла α и β. Тогава и третите им ъгли са равни $\sphericalangle ATL = \sphericalangle LTM$.

Следователно TL е ъглополовяща на $\sphericalangle ATB$.

Когато е построена обща външна допирателна в точката на допиране на две окръжности, съответният периферен ъгъл (в случая $\sphericalangle NTB$) може да се изрази чрез дъги и от двете окръжности.

ЗАДАЧИ

1. В четириъгълника $ABCD$ $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90°$. Докажете, че $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$ и $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$.

2. През точка M от окръжност с диаметър AB е построена хорда MN, перпендикулярна на AB, и допирателна t на k. Докажете, че:

а) разстоянията от точката A до правите t и MN са равни;

б) разстоянията от точката B до правите t и MN са равни.

3. Правата t е обща външна допирателна на окръжностите $k_1(O_1; R_1 = 6)$ и $k_2(O_2; R_2 = 2)$, а $O_1O_2 = 8$. Общата вътрешна допирателна на k_1 и k_2 пресича t в точка M, а N е средата на O_1O_2. Намерете дължината на отсечката MN.

Сравнете със задача 4 от урока. Подходяща е за домашна работа.

149

Текст към зад. 1 след урока: Самостоятелна работа на базата на задача 2. от урока. Възможност за оценяване.

Текст към зад. 2 след урока: Възможност за работа по групи за всяко едно от подусловията и обсъждане на начина за решаването им. Използвайте равенство на ъгли с перпендикулярни рамене и равенство на вписан и периферен ъгъл.

ВАРИАНТИ ЗА ДИАГНОСТИКА НА РЕЗУЛТАТИ ОТ ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА В 8. КЛАС

1. НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР

АЛГЕБРА

1. Ако 120% от дължината на дадена отсечка са 78 cm, то 30% от отсечката са равни на:

А) 19,5 cm　　Б) 25 cm　　В) 28,08 cm　　Г) 31,2 cm

2. Ако $n \neq 1$ е естествено число, едночленът $6nx^2y^3$ е подобен на:

А) $(nxy)^3$　　Б) $3y(2xy)^2$　　В) $\left[3x(-ny)^2\right]^2$　　Г) $\left(6x^2y^3\right)^n$

3. Ако $m \neq 0$ е параметър, определете степента на многочлена $2m^2x^2y - 4xy + 2m^3xy - m^6$.

А) 3　　Б) 4　　В) 5　　Г) 6

4. Колко на брой от дадените равенства са тъждества?

$(x+2y)^2 = x^2 + 2xy + 4y^2$;　　$(x-y)(x^2+2xy+y^2) = x^3 - y^3$;　　$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$.

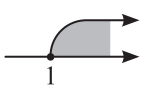
А) 0　　Б) 1　　В) 2　　Г) 3

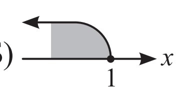
5. Числото $x = 1$ НЕ е корен на уравнението:

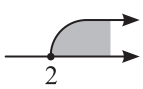
А) $(2x-1)^3 - x = 0$　　Б) $2(x-1)(x-2)(x-3) = 0$

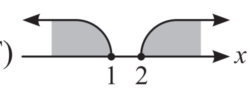
В) $(x-3)^4 - 16x^2 = 0$　　Г) $(3x+1)^2 - 8 = 0$

6. В кой от посочените случаи са изобразени графично решенията на неравенството $(x-2)^2 > x^2$?

А) 

Б) 

В) 

Г) 

7. Многочленът $(2x-3)^2 - (4x-6)(x-2) + (x-2)^2$ е тъждествено равен на:

А) $(x-1)^2$　　Б) $x^2 - 1$

В) $(x+1)^2$　　Г) никое от посочените

8. Сумата на естествените числа, които са решения на неравенството $\dfrac{x+1}{2} < \dfrac{17}{6} - \dfrac{x-5}{3}$, са:

А) 10　　Б) 9

В) 6　　Г) никое от посочените

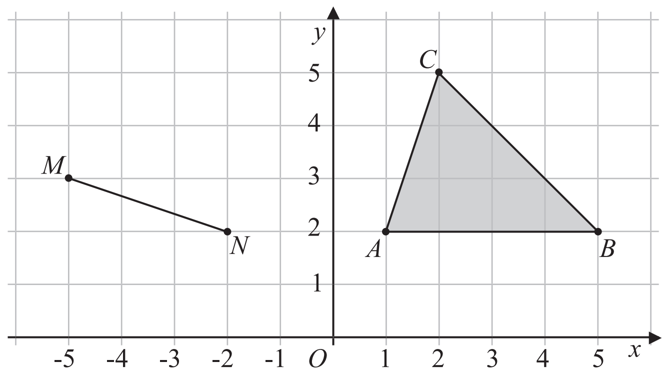
1. НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР

ГЕОМЕТРИЯ

1. Еднакви ли са два правоъгълни триъгълника, ако катет и остър ъгъл на единия триъгълник са равни на катет и остър ъгъл на другия триъгълник?

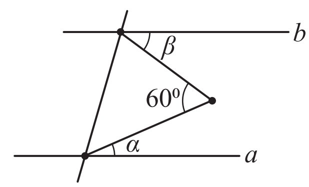
А) еднакви са по I признак Б) еднакви са по II признак
В) еднакви са по признака за правоъгълни триъгълници (IV признак)
Г) не може да се твърди, че са еднакви

2. В правоъгълна координатна система xOy са дадени точките $A(1;2)$, $B(5;2)$, $C(2;5)$, $M(-5;3)$ и $N(-2;2)$. Триъгълникът с върхове точките M, N и P е еднакъв на ΔABC, ако точката P е с координати:



А) $(-2;\ 5)$ Б) $(1;\ 5)$
В) $(-1;\ 6)$ Г) $(-5;\ -1)$

3. На чертежа правите a и b са успоредни. Как ще се изменят стойностите на ъгъл α, ако $\beta \in (30°;\ 50°)$?



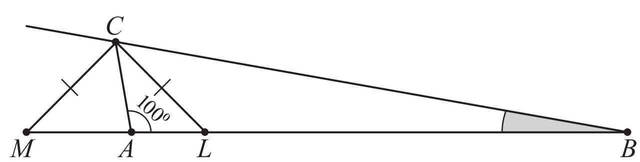
А) $\alpha \in (10°;\ 30°)$ Б) $\alpha \in (20°;\ 40°)$ В) $\alpha \in (30°;\ 50°)$ Г) $\alpha \in (130°;\ 150°)$

4. Кои от твърденията (1), (2) и (3) са неверни?

(1) Ъглополовящите на вътрешен и външен ъгъл при връх на триъгълник са перпендикулярни.
(2) Ъглополовящите на два вътрешни ъгъла на триъгълник са перпендикулярни.
(3) Ъглополовящите на два външни ъгъла на триъгълник са перпендикулярни.

А) само (1) и (2) Б) само (1) и (3)
В) само (2) и (3) Г) и трите твърдения са неверни

5. Отсечките CL и CM са ъглополовящи на вътрешния и на външния ъгъл при върха C на ΔABC. Ако $CL = CM$ и $\sphericalangle BAC = 100°$, то градусната мярка на $\sphericalangle ABC$ е равна на:



А) 10° Б) 15° В) 20° Г) 30°

6. Височината към бедро на равнобедрен триъгълник е два пъти по-малка от бедрото. Коя от посочените стойности не може да бъде мярка на ъгъл в триъгълника?

А) 15° Б) 45° В) 75° Г) 150°

7. В ΔABC $\sphericalangle C = 90°$, CD $(D \in AB)$ е височина и $AC = 2CD$. Посочете невярното твърдение.

А) $BC = 2BD$ Б) $AB = 4BD$ В) $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DCB$ Г) $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle ABC$

8. В ΔABC $\sphericalangle C = 90°$, $\sphericalangle A = 30°$ и $CH \perp AB$. Колко на брой от твърденията: $BC = 2BH$; $AH = 2BH$; $CH = 2AC$ не са верни?

А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3

2. ОСНОВНИ КОМБИНАТОРНИ ПОНЯТИЯ

Вариант 1

I част

1. Стойността на израза $P_4 + V_5^3 + C_6^4$ е:

А) 99 Б) 114 В) 79 Г) 100

2. Тест се състои от 5 въпроса с избираем отговор, като на всеки въпрос има 4 възможни отговора. По колко различни начина може да се попълни теста?

А) 500 Б) 1000 В) 1024 Г) 625

3. Колко са петцифрените числа, записани с различни четни цифри?

А) 64 Б) 96 В) 120 Г) 3125

4. В отбор по футбол от 11 човека трябва да се изберат капитан и помощник капитан. По колко различни начина може да стане това?

А) 55 Б) 110 В) 121 Г) 132

5. От град *A* до град *B* може да се стигне с автомобил или самолет, а от град *B* до град *C* може да се стигне с влак, автомобил или кораб. По колко различни начина може да стигне от *A* до *C* като се мине през *B*?

А) 5 Б) 6 В) 7 Г) 10

II част

6. В клас от 13 момичета и 14 момчета трябва да се избере комисия от три момичета и едно момче. По колко различни начина може да стане този избор?

7. В равнината са дадени 20 точки, никой три от които не лежат на една права. Колко триъгълници с върхове в тези точки могат да се построят?

III част

8. На учредително събрание на политическа партия присъствали 10 човека. От тях трябва да се избере политическо ръководство от трима, като двама от тези трима трябва да са председател и секретар. Колко различни ръководства могат да се изберат?

2. ОСНОВНИ КОМБИНАТОРНИ ПОНЯТИЯ

Вариант 2

I част

1. Стойността на израза $P_5 + V_4^2 + C_5^3$ е:

А) 46 Б) 87 В) 99 Г) 142

2. Тест се състои от 4 въпроса с избираем отговор, като на всеки въпрос има 5 възможни отговора. По колко различни начина може да се попълни теста?

А) 500 Б) 1000 В) 1024 Г) 625

3. Колко са петцифрените числа, записани с различни нечетни цифри?

А) 64 Б) 96 В) 120 Г) 3125

4. В отбор по баскетбол от 10 човека трябва да се изберат капитан и помощник капитан. По колко различни начина може да стане това?

А) 45 Б) 90 В) 110 Г) 120

5. От град *A* до град *B* може да се стигне с влак, автомобил или кораб, а от град *B* до град *C* може да се стигне с автомобил или самолет. По колко различни начина може да стигне от *A* до *C* като се мине през *B*?

А) 5 Б) 6 В) 7 Г) 10

II част

6. В клас от 14 момичета и 13 момчета трябва да се избере комисия от три момичета и едно момче. По колко различни начина може да стане този избор?

7. В равнината са дадени 19 точки, никой три от които не лежат на една права. Колко триъгълници с върхове в тези точки могат да се построят?

III част

8. На учредително събрание на политическа партия присъствали 9 човека. От тях трябва да се избере политическо ръководство от трима, като двама от тези трима трябва да са председател и секретар. Колко различни ръководства могат да се изберат?

3. ВЕКТОРИ
4. МЕДИЦЕНТЪР НА ТРИЪГЪЛНИК. СРЕДНА ОТСЕЧКА НА ТРИЪГЪЛНИК И ТРАПЕЦ

Вариант 1

I част

1. В равнобедрения ΔABC с $\sphericalangle C = 120°$ CM е медиана, а G – медицентър. Ако $GM = 2$, то:

А) $AC = 12$ Б) $AB = 12$ В) $BC = 6$ Г) $AB = 6$

2. В кой от посочените случаи точката G е медицентър на ΔABC с медиани AA_1, BB_1 и CC_1?

А) G е на равни разстояния от A, B и C

Б) $G = AA_1 \cap BB_1$

В) $G = A_1B_1 \cap CC_1$

Г) G дели CC_1 в отношение $1:2$, считано от C

3. Голямата основа на трапец е 30 cm, а малката основа е равна на отсечката, свързваща средите на диагоналите на трапеца. Големината на средната основа е:

А) 10 cm Б) 15 cm В) 20 cm Г) 25 cm

4. Два вектора са противоположни, ако имат:

А) равни дължини и обратни посоки Б) равни дължини

В) еднакви посоки Г) еднакви дължини и посоки

5. Точката D е средата на страната AB на ΔABC. Ако $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, то векторът $\overrightarrow{CD}$ е равен на:

А) $\frac{1}{2}\vec{a}$ Б) $\frac{1}{2}\vec{b}$ В) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ Г) $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$

II част

6. Ако G е медицентърът на ΔABC, докажете, че $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right)$.

7. Точката M дели вътрешно диагонала AC на успоредника $ABCD$ в отношение 1:2, считано от точка A. Докажете, че правите BM и DM разполовяват съответно страните AD и AB.

III част

8. Точката M е средата на бедрото AD на трапеца $ABCD$, а G е медицентърът на ΔBCM. Намерете MG, ако $AB = 18$, $CD = 6$.

3. ВЕКТОРИ
4. МЕДИЦЕНТЪР НА ТРИЪГЪЛНИК. СРЕДНА ОТСЕЧКА НА ТРИЪГЪЛНИК И ТРАПЕЦ

Вариант 2

I част

1. В равнобедрения ΔABC $\sphericalangle C = 120^\circ$ CM е медиана, а G – медицентър. Ако $CG = 6$, то:

А) $AC = 9$ Б) $AC = 12$ В) $AC = 18$ Г) $AB = 18$

2. В кой от посочените случаи точката G е медицентър на $\Delta\, ABC$ с медиани AA_1, BB_1 и CC_1?

А) G е на равни разстояния от A, B и C

Б) $G = A_1C_1 \cap B_1A_1$

В) G е на равни разстояния от A, B и C

Г) G дели вътрешно CC_1 в отношение $1:2$, считано от C_1

3. Голямата основа на трапец е 18 cm, а малката основа е равна на отсечката, свързваща средите на диагоналите на трапеца. Големината на средната основа е:

А) 12 cm Б) 10 cm В) 8 cm Г) 6 cm

4. Два вектора са равни, ако имат:

А) равни дължини Б) еднакви дължини и посоки

В) еднакви посоки Г) равни дължини и обратни посоки

5. Точката D е средата на страната AB на ΔABC. Ако $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, то векторът $\overrightarrow{DC}$ е равен на:

А) $\frac{1}{2}\vec{a}$ Б) $\frac{1}{2}\vec{b}$ В) $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ Г) $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$

II част

6. Ако G е медицентърът на ΔABC, докажете, че $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right)$.

7. Точката M дели вътрешно диагонала AC на успоредника $ABCD$ в отношение 2:1, считано от точка A. Докажете, че правите BM и DM разполовяват съответно страните CD и BC.

III част

8. Точката M е средата на бедрото BC на трапеца $ABCD$, а G е медицентърът на ΔADM. Намерете MG, ако $AB = 12$, $CD = 6$.

5. КВАДРАТЕН КОРЕН

Вариант 1

I част

1. Стойността на $\sqrt{36}-\sqrt{81}$ е:

А) –5 Б) –3 В) 3 Г) 5

2. Пресметнете стойността на $\dfrac{\sqrt{1,21}}{\sqrt{0,04}}+\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}$.

А) 6 Б) 7 В) 8 Г) 9

3. Коренът $\sqrt{19}$ с точност до десетите е равен на:

А) 4 Б) 4,2 В) 4,3 Г) 4,4

4. Опростете израза $\left(\sqrt{11}-\sqrt{22}\right)^2+2\sqrt{242}$.

А) $33+74\sqrt{2}$ Б) $11-22\sqrt{2}$ В) 22 Г) 33

5. За числата $7\sqrt{3}$, $6\sqrt{5}$ и $5\sqrt{6}$ е вярно, че:

А) $5\sqrt{6}<7\sqrt{3}<6\sqrt{5}$ Б) $6\sqrt{5}<7\sqrt{3}<5\sqrt{6}$

В) $7\sqrt{3}<6\sqrt{5}<5\sqrt{6}$ Г) $7\sqrt{3}<5\sqrt{6}<6\sqrt{5}$

II част

6. Опростете израза $\dfrac{7}{5\sqrt{3}-2\sqrt{17}}+\dfrac{5}{4\sqrt{5}+5\sqrt{3}}$.

7. Представете израза $\dfrac{\sqrt{84}}{\sqrt{3}}-\dfrac{2\sqrt{14}}{\sqrt{18}}-\dfrac{\sqrt{175}}{10}$ във вида $\dfrac{\sqrt{a}}{b}$, където a и b са естествени числа.

III част

8. Сравнете околната повърхнина на куб със страна $\sqrt{3}+1\text{m}$ и пълната повърхнина на паралелепипед с измерения $2\sqrt{3}$ m, $\sqrt{3}-1\text{m}$ и $\sqrt{3}+1\text{m}$.

5. КВАДРАТЕН КОРЕН

Вариант 2

I част

1. Стойността на $\sqrt{49}-\sqrt{100}$ е:

А) –5 Б) –3 В) 3 Г) 5

2. Пресметнете стойността на $\dfrac{\sqrt{1,44}}{\sqrt{0,04}}+\dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{4}}$.

А) 6 Б) 7 В) 8 Г) 9

3. Коренът $\sqrt{20}$ с точност до десетите е равен на:

А) 4 Б) 4,3 В) 4,4 Г) 4,5

4. Опростете израза $\left(\sqrt{11}+\sqrt{22}\right)^2-2\sqrt{242}$.

А) $33+74\sqrt{2}$ Б) $11-22\sqrt{2}$ В) 22 Г) 33

5. За числата $7\sqrt{3}$, $9\sqrt{2}$ и $5\sqrt{6}$ е вярно, че:

А) $5\sqrt{6}<7\sqrt{3}<9\sqrt{2}$ Б) $9\sqrt{2}<7\sqrt{3}<5\sqrt{6}$

В) $7\sqrt{3}<9\sqrt{2}<5\sqrt{6}$ Г) $7\sqrt{3}<5\sqrt{6}<9\sqrt{2}$

II част

6. Опростете израза $\dfrac{7}{5\sqrt{3}+2\sqrt{17}}-\dfrac{5}{4\sqrt{5}-5\sqrt{3}}$.

7. Представете израза $\dfrac{\sqrt{60}}{\sqrt{3}}-\dfrac{2\sqrt{10}}{\sqrt{18}}-\dfrac{\sqrt{125}}{10}$ във вида $\dfrac{\sqrt{a}}{b}$, където a и b са естествени числа.

III част

8. Сравнете околната повърхнина на куб със страна $\sqrt{5}+1$ m и пълната повърхнина на паралелепипед с измерения $3\sqrt{5}$ m, $\sqrt{5}-1$ m и $\sqrt{5}+1$ m.

6. КВАДРАТНИ УРАВНЕНИЯ

Вариант 1

I част

1. Корените на уравнението $x^2 - 2x = 3$ са:

А) -1 и -3 Б) -1 и 3 В) 1 и -3 Г) 1 и 3

2. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - 6x + 2 = 0$, то стойността на израза $(x_1 - 2)(x_2 - 2)$ е равна на:

А) 16 Б) 6 В) -6 Г) -14

3. Кое от квадратните уравнения има корени с различни знаци?

А) $-3x^2 + 7x + 2 = 0$ Б) $-3x^2 + 7x - 2 = 0$

В) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ Г) $2x^2 + 7x + 3 = 0$

4. След съкращаване на дробта $\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1}$ се получава:

А) $\frac{2x-3}{x-1}$ Б) $\frac{2x+3}{x-1}$ В) $\frac{2x-3}{x+1}$ Г) $\frac{2x+3}{x+1}$

5. Биквадратно уравнение има 4 корена, като сборът на два от тях е 5. Сборът на другите му два корена е:

А) 0 Б) -5 В) $\sqrt{5}$ Г) 25

II част

6. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 + 2x - 4 = 0$, съставете квадратно уравнение с корени $y_1 = \frac{1}{x_1}$, $y_2 = \frac{1}{x_2}$.

7. Намерете сбора от корените на уравнението $(2x^2 - 3x - 2)(x^2 + 3x + 1) = 0$.

III част

8. Решете уравнението $(x+1)(x-2)(x-3) = (x+1)^2$.

6. КВАДРАТНИ УРАВНЕНИЯ

Вариант 2

I част

1. Корените на уравнението $x^2 - 3x = -2$ са:

А) –1 и –2 Б) –1 и 2 В) 1 и –2 Г) 1 и 2

2. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - 3x - 2 = 0$, то стойността на израза $(2x_1 + 1)(2x_2 - 1)$ е равна на:

А) 15 Б) 11 В) –9 Г) –15

3. Кое от квадратните уравнения има два различни положителни корена?

А) $-4x^2 + 7x - 1 = 0$ Б) $-4x^2 - 7x + 1 = 0$

В) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ Г) $4x^2 + 6x + 1 = 0$

4. След съкращаване на дробта $\dfrac{3x^2 - x - 4}{x^2 - 1}$ се получава:

А) $\dfrac{3x-4}{x-1}$ Б) $\dfrac{3x+4}{x-1}$ В) $\dfrac{3x-4}{x+1}$ Г) $\dfrac{3x+4}{x+1}$

5. Два от корените на биквадратно уравнение са 2 и $-\sqrt{3}$. Другите му корени са:

А) 4 и 3 Б) -2 и $\sqrt{3}$ В) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ Г) -2 и 3

II част

6. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 + 2x - 4 = 0$, съставете квадратно уравнение с корени $y_1 = x_1 - 1,\ y_2 = x_2 - 1$.

7. Намерете произведението от корените на уравнението $(2x^2 - 7x + 3)(3x^2 + 3x - 5) = 0$.

III част

8. Решете уравнението $(x-1)(x+2)(x+3) = -(x-1)^2$.

ПРИМЕРНА КЛАСНА РАБОТА – I СРОК

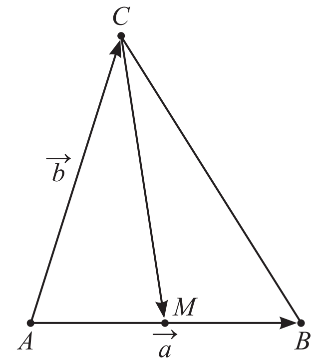
Вариант 1

I част

1. Броят на всички възможни отсечки, свързващи върховете на десетоъгълник, е:

А) P_{10} Б) V_{10}^2 В) C_{10}^2 Г) 10

2. В ΔABC $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, а M е средата на AB. Векторът $\overrightarrow{CM}$ е равен на:



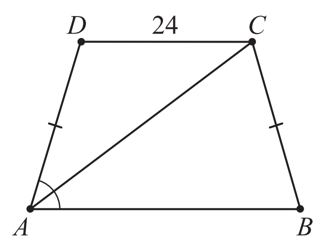
А) $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$ Б) $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$

В) $\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$ Г) $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

3. Ако G е медицентърът на правоъгълен ΔABC с хипотенуза $AB=18$ cm, то дължината на отсечката CG е:

А) 3 cm Б) 4 cm В) 6 cm Г) 9 cm

4. В равнобедрен трапец $ABCD$ $\left(AB \parallel CD\right)$ с периметър 108 cm $\sphericalangle BAC=\sphericalangle CAD$ и $CD=24$ cm. Дължината на средната основа на трапеца е:



А) 24 cm Б) 28 cm

В) 30 cm Г) 36 cm

5. Сборът $\sqrt{3}+\sqrt{12}$ е равен на:

А) $\sqrt{15}$ Б) 6 В) $3\sqrt{12}$ Г) $\sqrt{27}$

II част

6. Пресметнете стойността на израза $m=\frac{\sqrt{18^2-14^2}}{\sqrt{2}}-\frac{6\sqrt{35}-\sqrt{567}}{\sqrt{7}}+6\sqrt{5}$.

7. Намерете сбора от квадратите на корените на уравнението $x^2-2x-1=0$.

III част

8. Точката M дели вътрешно диагонала AC на успоредника $ABCD$ в отношение $AM:MC=1:2$. Докажете, че правите BM и DM разполовяват съответно страните AD и AB.

ПРИМЕРНА КЛАСНА РАБОТА – I СРОК

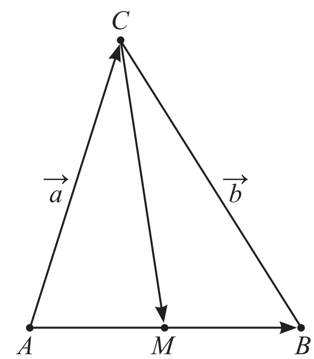
Вариант 2

I част

1. Броят на диагоналите на осмоъгълник е:

А) 20 Б) 28 В) 40 Г) 56

2. В ΔABC $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, а M е средата на AB. Векторът $\overrightarrow{CM}$ е равен на:



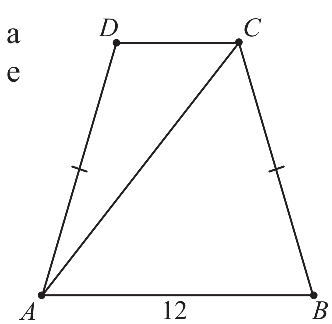
А) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ Б) $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$

В) $\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$ Г) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

3. Ако G е медицентърът на правоъгълен ΔABC $(\sphericalangle C = 90^\circ)$ и $CG = 6$ cm, то дължината на страната AB е:

А) 9 cm Б) 12 cm В) 15 cm Г) 18 cm

4. Голямата основа на равнобедрен трапец $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ е $AB = 12$ cm, а диагоналът AC е ъглополовяща на $\sphericalangle BCD$. Ако средната основа на трапеца е 9 cm, то периметърът му е:



А) 38 cm Б) 39 cm В) 42 cm Г) 45 cm

5. Сборът $\sqrt{2} + \sqrt{18}$ е равен на:

А) $\sqrt{20}$ Б) $\sqrt{28}$ В) $\sqrt{32}$ Г) $\sqrt{36}$

II част

6. Пресметнете стойността на израза $m = \left(\sqrt{27} + 2\sqrt{6}\right)\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$.

7. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - 3x - 2 = 0$, пресметнете стойността на израза

$$A = \frac{x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2 - 3}{x_1 + x_2}.$$

III част

8. Точката P е средата на страната AB на успоредника $ABCD$. Правата DP пресича диагонала AC в точка Q. Докажете, че $AC = 3AQ$ и $DQ = 2QP$.

7. ОКРЪЖНОСТ

Вариант 1

I част

1. Ако MN е диаметър в окръжност k, а AB е нейна хорда, в кой от случаите А), Б) или В) НЕ може да се твърди, че $MN \perp AB$?

А) MN е симетрала на AB

Б) M разполовява дъгата $\overset{\frown}{AB}$

В) MN разполовява хордата AB

Г) и от трите твърдения А), Б) и В) следва, че $MN \perp AB$

2. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност k. Ако дъгата $\overset{\frown}{ACB}$ е с $40°$ по-голяма от дъгата $\overset{\frown}{ADB}$, то $\sphericalangle ACB$ е:

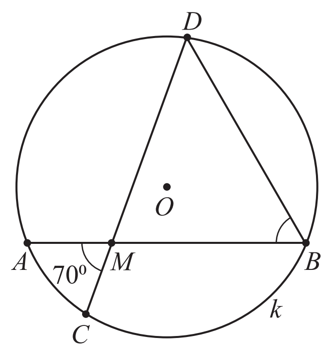
А) с $40°$ по-голям от $\sphericalangle ADB$ Б) с $20°$ по-малък от $\sphericalangle ADB$

В) с $40°$ по-голям от $\sphericalangle ADB$ Г) с $20°$ по-малък от $\sphericalangle ADB$

3. Хордите AB и CD на окръжност k се пресичат в точка M. Ако $\sphericalangle AMC = 70°$ и $\overset{\frown}{BC} = 100°$, то $\sphericalangle ABD$ е равен на:

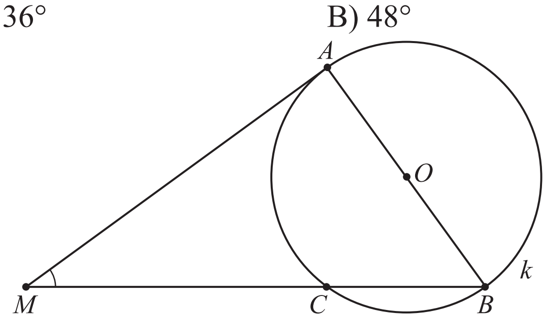
А) $50°$ Б) $60°$

В) $70°$ Г) $80°$



4. Отсечката MA е допирателна към окръжност k, AB е диаметър, а C е общата точка на k и отсечката MB. Ако $\overset{\frown}{AC} : \overset{\frown}{BC} = 3 : 2$, то $\sphericalangle AMB$ е равен на:

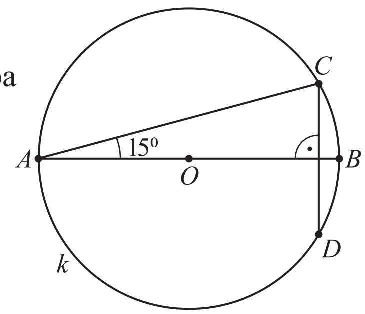
А) $18°$ Б) $36°$ В) $48°$ Г) $54°$



5. Окръжностите $k_1(O_1;\, r_1 = 2)\, k_2(O_2;\, r_2 = 5)$ имат две общи допирателни, ако отсечката O_1O_2 е с дължина:

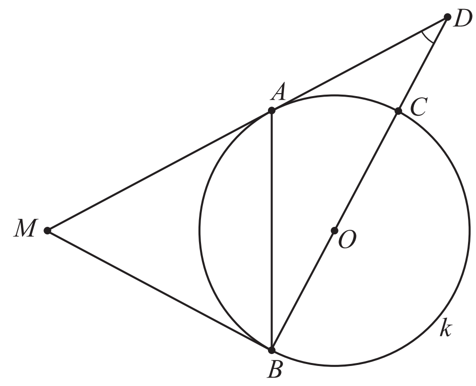
А) $2\sqrt{2}$ Б) 3 В) $3\sqrt{2}$ Г) $5\sqrt{2}$

II част



6. В окръжност k е построена хорда CD, перпендикулярна на диаметъра AB. Ако $\sphericalangle BAC = 15^\circ$, намерете отношението $CD : AB$.

7. През точка M, външна за окръжност $k(O)$, са построени допирателните отсечки MA и MB. Лъчът $BO^{\rightarrow}$ пресича k в точка C, а правата MA – в точка D. Ако $\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{AB} = 112^\circ$, намерете големината на $\sphericalangle MDB$.



III част

8. Окръжностите $k(O; r)$ и $k_1(O_1; r_1)$ $(r > r_1)$ се допират външно в точка P, AA_1 $(A \in k,\ A_1 \in k_1)$ е тяхна обща външна допирателна, а M е пресечната точка на правите AA_1 и OO_1. Намерете разстоянието от P до AA_1, ако $r = 6\,\text{cm}$ и $\sphericalangle AMO = 30^\circ$.

7. ОКРЪЖНОСТ

Вариант 2

I част

1. В окръжност $k(O;\ r=6)$ AB е хорда, а една от съответните ѝ дъги е с мярка $240°$. Разстоянието от O до AB е:

А) 2 Б) 3 В) 4 Г) 12

2. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност k. Ако $\sphericalangle ADC$ е с $60°$ по-голям от $\sphericalangle ABC$, то дъгата $\overset{\frown}{ADC}$ е:

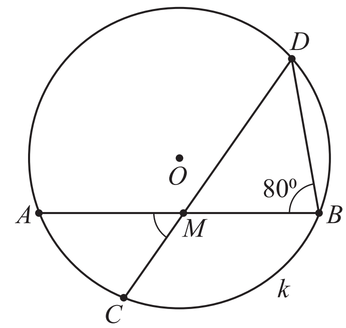
А) със $120°$ по-голяма от дъгата $\overset{\frown}{ABC}$ Б) със $120°$ по-малка от дъгата $\overset{\frown}{ABC}$

В) с $30°$ по-голяма от дъгата $\overset{\frown}{ABC}$ Г) с $30°$ по-малка от дъгата $\overset{\frown}{ABC}$

3. Хордите AB и CD на окръжност k се пресичат в точка M. Ако $\sphericalangle ABD = 80°$ и $\overset{\frown}{BC} = 90°$, то $\sphericalangle AMC$ е равен на:

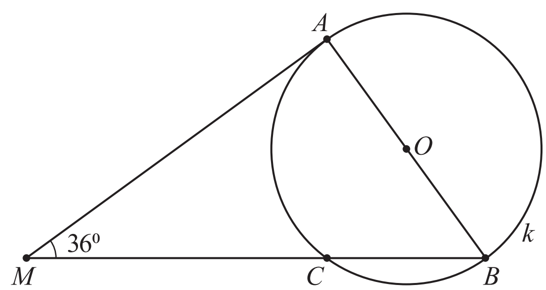
А) $45°$ Б) $50°$

В) $55°$ Г) $60°$



4. Отсечката MA е допирателна към окръжност k, AB е диаметър, а C е общата точка на k и отсечката MB. Ако $\sphericalangle AMB = 36°$, намерете отношението $\overset{\frown}{AC} : \overset{\frown}{BC}$.

А) $3:2$ Б) $2:1$ В) $4:3$ Г) $5:3$

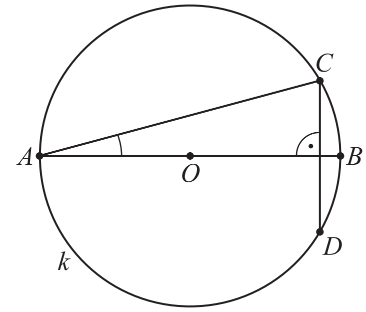


5. Централата d на окръжностите $k_1(O_1;\ r_1=2)$ и $k_2(O_2;\ r_2=5)$ приема стойности от множеството $\left\{\sqrt{5},\ 4,\ 5\sqrt{2}\right\}$. За колко на брой от тези стойности окръжностите нямат общи точки?

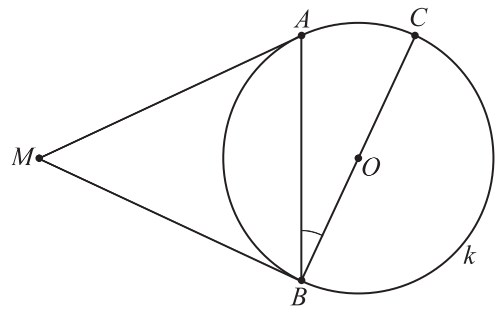
А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3

II част

6. В окръжност k е построена хорда CD, перпендикулярна на диаметъра AB. Намерете $\sphericalangle BAC$, ако $CD : AB = 1 : 2$.



7. През точка M, външна за окръжност $k(O)$, са построени допирателните отсечки MA и MB, BC е диаметър, а $\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{AB} = 100°$. Намерете големината на $\sphericalangle ABC$.



III част

8. Окръжностите $k(O; r)$ и $k_1(O_1; r_1)$ $(r > r_1)$ се допират външно в точка P, AA_1 $(A \in k,\ A_1 \in k_1)$ е тяхна обща външна допирателна, а M е пресечната точка на правите AA_1 и OO_1. Намерете r и r_1, ако $\sphericalangle AMO = 30°$, а разстоянието от P до AA_1 е 6 cm.

8. РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

Вариант 1

I част

1. Колко на брой от числата 1, 2 и 3 са допустими стойности за израза $\dfrac{1}{x^2-2x+1}+\dfrac{x^2-16}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}$?

А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3

2. При $x \neq y$ изразът $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}$ е тъждествено равен на:

А) $x-y$ Б) $x+y$ В) $2x-2y$ Г) $2x+2y$

3. Разликата на рационалните дроби $\dfrac{x-1}{x^2-4}$ и $\dfrac{1}{x-2}$ е:

А) $\dfrac{x-2}{x^2-x-2}$ Б) $\dfrac{x}{x^2+x-6}$ В) $\dfrac{x-2}{4-x^2}$ Г) $\dfrac{3}{4-x^2}$

4. След повдигане в трета степен на $\dfrac{x^2(x-y)}{x^2-y^2}$ се получава НЕСЪКРАТИМАТА дроб:

А) $\dfrac{x^6(x-y)^3}{\left(x^2-y^2\right)^3}$ Б) $\dfrac{x^6}{(x-y)^3}$ В) $\dfrac{x^6}{(x+y)^3}$ Г) $\dfrac{x^6}{(x-y)^2}$

5. Множеството от решенията на уравнението $\dfrac{x^2-9}{x-3}=3$ е:

А) $\{0\}$ Б) $\{3\}$ В) $\{-3\}$ Г) $\{\pm 3\}$

II част

6. Намерете стойността на израза $\left(2x+2+\dfrac{2}{x-1}\right):\left(x+\dfrac{x^2}{1-x}\right)$ за $x=0,7$.

7. Решете уравнението $\dfrac{x}{x+1}-1-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2}{x^2-1}$.

III част

8. Решете уравнението с полагане $\dfrac{1}{(x+1)^2}=5-4\dfrac{1}{x+1}$.

8. РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

Вариант 2

I част

1. Колко на брой от числата 1, 3 и 4 са допустими стойности за израза $\dfrac{1}{x^2+2x+1}+\dfrac{x^2-16}{x-4}+\dfrac{1}{x-3}$?

А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3

2. При $x \neq y$ изразът $\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$ е тъждествено равен на:

А) $x-y$ Б) $x+y$ В) $2x+2y$ Г) $2x-2y$

3. Сборът на рационалните дроби $A=\dfrac{x}{x^2-1}$ и $B=\dfrac{1}{1-x}$ е равен на:

А) $\dfrac{1}{1-x^2}$ Б) $\dfrac{1}{x^2-1}$ В) $\dfrac{1}{x}$ Г) $\dfrac{2x+1}{1-x^2}$

4. След повдигане в трета степен на $\dfrac{y^2(x-y)}{x^2-y^2}$ се получава НЕСЪКРАТИМАТА дроб:

А) $\dfrac{y^6(x-y)^3}{(x^2-y^2)^3}$ Б) $\dfrac{y^6}{(x+y)^3}$ В) $\dfrac{y^6}{(x-y)^3}$ Г) $\dfrac{y^6}{x+y}$.

5. Множеството от решенията на уравнението $\dfrac{x^2-25}{x-5}=5$ е:

А) $\varnothing$ Б) $\{5\}$ В) $\{-5\}$ Г) $\{0\}$

II част

6. Намерете стойността на израза $\left(x+1+\dfrac{1}{x-1}\right):\left(x+\dfrac{x^2}{1-x}\right)$ за $x=1\dfrac{2}{5}$.

7. Решете уравнението $\dfrac{12}{x}=\dfrac{9-x}{x-3}+1$.

III част

8. Решете уравнението с полагане $\dfrac{1}{(x-1)^2}-5=4\dfrac{1}{x-1}$.

9. ВПИСАНИ И ОПИСАНИ МНОГОЪГЪЛНИЦИ

Вариант 1

I част

1. Триъгълник ABC е вписан в окръжност с център O. Ако $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BAC = 74°$, да се намери $\sphericalangle ACB$.

А) 111° Б) 69° В) 32° Г) 16°

2. В триъгълник ABC е вписана окръжност с център I. Ако $\sphericalangle ACB = 82°$, то $\sphericalangle AIB$ е равен на:

А) 142° Б) 131° В) 110° Г) 90°

3. Външновписаната окръжност към страната BC на триъгълник ABC има център I_a. Ако $\sphericalangle BAC = 94°$, то $\sphericalangle BI_aC$ е равен на:

А) 94° Б) 88° В) 43° Г) 30°

4. В триъгълник ABC са построени височините AA_1, BB_1 и CC_1. Ако $\alpha = 54°$, $\beta = 70°$ и $\gamma = 56°$, да се намерят ъглите на триъгълник $A_1B_1C_1$.

А) 72°, 40° и 68° Б) 70°, 34° и 76° В) 30°, 60° и 90° Г) 62°, 50° и 68°

5. В четириъгълник $ABCD$ е вписана окръжност. Ако AB = 27 cm, BC = 31 cm и CD = 22 cm, то страната DA е с дължина:

А) 24 cm Б) 22 cm В) 20 cm Г) 18 cm

II част

6. Трапец $ABCD$ е описан около окръжност с радиус 4 cm и е вписан в окръжност. Ако бедрото BC на трапеца има дължина 11 cm, да се намери лицето му.

7. Да се намери радиусът на вписаната окръжност на правоъгълен триъгълник с катет 5 dm и лице 30 dm^2.

III част

8. В остроъгълен триъгълник ABC е построена височината AP. Точки Q и R са среди съответно на страните AB и на AC. Ако четириъгълникът $AQPR$ е вписан в окръжност, да се намери $\sphericalangle BAC$.

9. ВПИСАНИ И ОПИСАНИ МНОГОЪГЪЛНИЦИ

Вариант 2

I част

1. Триъгълник ABC е вписан в окръжност с център O. Ако $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BAC = 72^\circ$, да се намери $\sphericalangle ACB$.

А) 120° Б) 72° В) 70° Г) 65°

2. В триъгълник ABC е вписана окръжност с център I. Ако $\sphericalangle ACB = 80^\circ$, то $\sphericalangle AIB$ е равен на:

А) 130° Б) 125° В) 120° Г) 90°

3. Външновписаната окръжност към страната BC на триъгълник ABC има център I_a. Ако $\sphericalangle BAC = 96^\circ$, то $\sphericalangle BI_aC$ е равен на:

А) 95° Б) 86° В) 75° Г) 42°

4. В триъгълник ABC са построени височините AA_1, BB_1 и CC_1. Ако $\alpha = 54^\circ$, $\beta = 74^\circ$ и $\gamma = 52^\circ$, да се намерят ъглите на триъгълник $A_1B_1C_1$.

А) 72°, 40° и 68° Б) 72°, 32° и 76°

В) 30°, 60° и 90° Г) 82°, 40° и 58°

5. В четириъгълник $ABCD$ е вписана окръжност. Ако $AB = 32$ cm, $BC = 37$ cm и $CD = 28$ cm, то страната DA е с дължина:

А) 24 cm Б) 23 cm В) 22 cm Г) 18 cm,

II част

6. Трапец $ABCD$ е описан около окръжност с радиус 3 cm и е вписан в окръжност. Ако бедрото BC на трапеца има дължина 12 cm, да се намери лицето му.

7. Да се намери радиусът на вписаната окръжност на правоъгълен триъгълник с катет 7 dm и лице 84 dm^2.

III част

8. В триъгълник ABC е построена височината AP. Точки Q и R са среди съответно на страните AB и на AC. Ако четириъгълникът $AQPR$ е вписан в окръжност, да се намери $\sphericalangle BAC$.

ОТГОВОРИ НА ВАРИАНТИТЕ ЗА ДИАГНОСТИКА

1. НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР

Алгебра

1	2	3	4	5	6	7	8
А	Б	А	Б	Г	Б	А	А

Геометрия

1	2	3	4	5	6	7	8
Г	Г	А	В	А	Б	Г	Б

2. ОСНОВНИ КОМБИНАТОРНИ ПОНЯТИЯ

Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7	8
А	В	Б	Б	Б	$C_{13}^3.C_{14}^1 = 4004$	$C_{20}^3 = 1140$	$10.9.8 = 720$

Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8
Г	Г	В	Б	Б	$C_{14}^3.C_{13}^1 = 4732$	$C_{19}^3 = 969$	$9.8.7 = 504$

3. ВЕКТОРИ
4. МЕДИЦЕНТЪР НА ТРИЪГЪЛНИК. СРЕДНА ОТСЕЧКА НА ТРИЪГЪЛНИК И ТРАПЕЦ

Вариант 1

1	2	3	4	5	8
А	Б	В	А	Г	$MG = 8$

Вариант 2

1	2	3	4	5	8
В	Г	А	Б	В	$MG = 6$

5. КВАДРАТЕН КОРЕН

Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7	8
Б	В	Г	Г	Г	$2\sqrt{17}+4\sqrt{5}$	$\frac{\sqrt{175}}{6}$	Околната повърхнина е по-голяма

Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8
Б	Г	Г	Г	В	$C_{13}^{3}.C_{14}^{1}=4004$	$\frac{\sqrt{125}}{6}$	Пълната повърхнина е по-голяма

6. КВАДРАТНИ УРАВНЕНИЯ

Вариант 1

1	2	3	4	5
Б	В	А	Г	Б

6. $4y^2-2y-1=0.$

7. $\underbrace{x_1+x_2}_{\frac{3}{2}}+\underbrace{x_3+x_4}_{-3}=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}.$

8. $(x+1)(x-2)(x-3)=(x+1)^2 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x-3)-(x+1)^2=0 \Leftrightarrow$

$(x+1)\left[\left(x^2-5x+6\right)-(x+1)\right]=0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-6x+5\right)=0 \Leftrightarrow x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=5.$

Вариант 2

1	2	3	4	5
Г	Г	А	А	Б

6. $y^2+4y-1=0.$

7. $\underbrace{x_1x_2}_{\frac{3}{2}}\underbrace{x_3x_4}_{-\frac{5}{3}}=\frac{3}{2}.\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{5}{2}.$

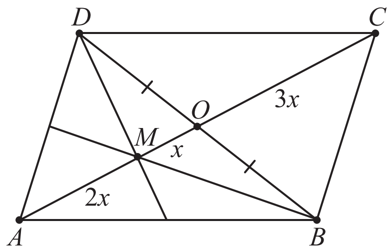
8. $(x-1)(x+2)(x+3)=-(x-1)^2 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x+3)+(x-1)^2=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)\left[\left(x^2+5x+6\right)+(x-1)\right]=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+6x+5\right)=0 \Leftrightarrow x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=-5.$

ПРИМЕРНА КЛАСНА РАБОТА – I СРОК

Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7
В	Б	В	В	Г	$m=17$	$x_1^2+x_2^2=6$

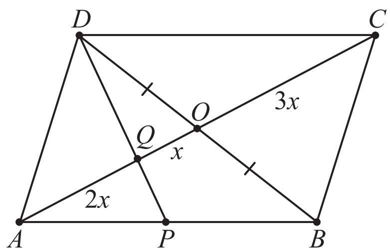


8. Означаваме $AC=6x$ и от $AM:MC=1:2$ следва, че $AM=\frac{1}{3}AC=2x$ и $MC=\frac{2}{3}AC=4x$. Ако $AC\cap BD=O$, то $AO=CO=\frac{1}{2}AC=3x$ и $MO=AO-AM=3x-2x=x$. Отсечката AO е медиана в ΔABD, $M\in AO$ и $AM:MO=2x:x=2:1$. Следователно M е медицентърът на ΔABD. Тогава правите BM и DM, свързващи връх на ΔABD с медицентъра M, ще разполовяват страните AD и AB.

ПРИМЕРНА КЛАСНА РАБОТА – I СРОК

Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7
А	А	Г	Г	В	$m=\sqrt{3}$	$A=-3$



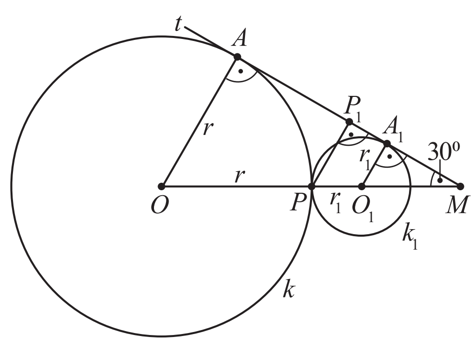
8. Нека $AC\cap BD=O$ и $AO=CO=3x$. Отсечките AO и DP са медиани в ΔABD, общата им точка Q е медицентър на триъгълника, $DQ=2QP$ и $AQ=\frac{2}{3}AO=2x$.
Тогава $AC=6x$ и $AC=3AQ$.

7. ОКРЪЖНОСТ

Вариант 1

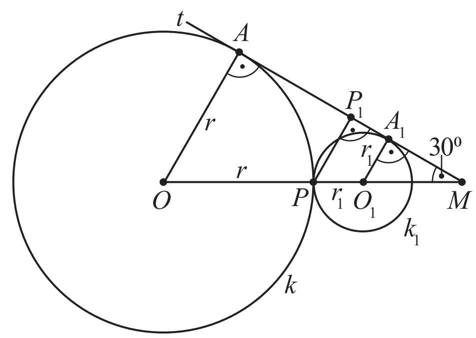
1	2	3	4	5	6	7
В	Г	Б	Б	В	$CD:AB=1:2$	$\sphericalangle MDB=34^\circ$

8. В правоъгълните триъгълници AOM и A_1O_1M с $\sphericalangle M=30^\circ$ от $MO=2r$, $MO_1=2r_1$, $OO_1=r+r_1$ и $MO=MO_1+OO_1$ следва, че $2r=3r_1+r$, $r=3r_1$ и P е средата на OM.
Ако PP_1 е разстоянието от P до AA_1, то PP_1 е средна отсечка в ΔAOM и $PP_1=\frac{1}{2}OM=\frac{r}{2}=3\,\text{cm}$.



Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7
Б	Б	В	А	В	$CD : AB = 1 : 2$	$\sphericalangle ABC = 25^\circ$



8. В правоъгълните триъгълници AOM и A_1O_1M с $\sphericalangle M = 30^\circ$ от $MO = 2r$, $MO_1 = 2r_1$, $OO_1 = r + r_1$ и $MO = MO_1 + OO_1$ следва, че $2r = 3r_1 + r$, $r = 3r_1$ и P е средата на OM.

Ако PP_1 е разстоянието от P до AA_1, то PP_1 е средна отсечка в ΔAOM и $PP_1 = \dfrac{1}{2}OM = \dfrac{r}{2} = 6$ cm.

Тогава $r = 12$ cm и $r_1 = 4$ cm.

8. РАЦИОНАЛНИ ДРОБИ

Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7	8
А	А	Г	В	А	– 1,4	$\varnothing$	$-\dfrac{6}{5};\ 0$

Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8
Б	Б	А	Б	Г	$-\dfrac{7}{5}$	6	$\dfrac{6}{5};\ 0$

9. ВПИСАНИ И ОПИСАНИ МНОГОЪГЪЛНИЦИ

Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7	8
Б	Б	В	А	Г	88 cm^2	2 dm	90°

Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8
Б	А	Г	Б	Б	72 cm^2	3 dm	90°

УТВЪРДИЛ

Директор: . . . .

(Име, фамилия, подпис)

ГОДИШНО ТЕМАТИЧНО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ
по учебния предмет математика за 8. клас

ПЪРВИ УЧЕБЕН СРОК – 18 СЕДМИЦИ Х 3 ЧАСА СЕДМИЧНО = 54 ЧАСА

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия	Контекст и дейности за всяка урочна единица	Методи и форми на оценяване по теми и/или раздели	Забележка
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1.	1	Формули за съкратено умножение	Начален преговор	Знае формулите за съкратено умножение.		Използва формулите при решаване на задачи.	Работа в час. Домашна работа	
2.	1	Линейни уравнения. Степени	Начален преговор	Умее да решава линейни уравнения. Знае действията със степени.		Прилага уменията си при решаване на уравнения и действия със степени.	Работа в час. Домашна работа	
3.	1	Числови неравенства	Начален преговор	Умее да решава линейни неравенства.		Прилага уменията си при решаване на неравенства и да представя решенията им графично.	Работа в час. Домашна работа	
4.	2	Еднакви триъгълници	Начален преговор	Знае признаците за еднаквост на триъгълници.		Използва признаците за еднаквост на триъгълници при решаване на задачи.	Работа в час. Домашна работа	
5.	2	Входно равнище	Тема за самоконтрол	Умее да решава линейни уравнения и неравенства. Прилага знанията си за еднакви триъгълници.		Диагностика на математическата грамотност на учениците от 8. клас.	Писмена работа	

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия	Контекст и дейности за всяка урочна единица	Методи и форми на оценяване по теми и/или раздели	Забележка
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
6.	2	Умножение и събиране на възможности	Нови знания	Знае правилата за умножение и събиране на възможности.		Определя кога се използват правилата за умножение и събиране на възможности.	Работа в час. Домашна работа	
7.	3	Умножение и събиране на възможности. Упражнение	Упражнение	Затвърждава знанията за умножение и събиране на възможности.			Устно изпитване. Домашна работа	
8.	3	Пермутации и вариации	Нови знания	Знае какво е пермутация и вариация и формулите за пресмятането им.	пермутации и вариации без повторение	Пресмята пермутации и вариации в конкретни задачи.	Работа в час. Домашна работа	
9.	3	Комбинации	Нови знания	Знае какво е комбинация от n елемента k-ти клас.	комбинация от n елемента k-ти клас	Пресмята комбинации в конкретни задачи.	Работа в час. Домашна работа – може да се даде темата за самоконтрол.	
10.	4	Основни комбинаторни понятия	Тема за самоконтрол	Умее да прилага знанията си при решаване на комбинаторни задачи.		Диагностика до колко умее да открива и решава ситуации, свързани с основните комбинаторни понятия.	Писмена работа	

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия	Контекст и дейности за всяка урочна единица	Методи и форми на оценяване по теми и/или раздели	Забележка
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
11.	4	Вектор	Нови знания	Знае понятието „вектор“ и понятията, свързани с него.	насочена отсечка, вектор, нулев вектор, дължина на вектор, посока на вектор, еднопосочни вектори, противопосочни вектори, равни вектори, противоположни вектори	Използва правилно понятието „вектор“ и понятията, свързани с него.	Работа в час. Домашна работа или малък проект къде освен в математиката се използва това понятие.	
12.	4	Събиране и изваждане на вектори. Свойства	Нови знания	Знае операциите събиране и изваждане на вектори и техните свойства.	сбор на вектори, разлика на вектори	Умее да извършва операциите събиране и изваждане на вектори и техните свойства.	Работа в час. Домашна работа	
13.	5	Събиране и изваждане на вектори. Упражнение	Упражнение	Затвърждава знанията за операциите събиране и изваждане на вектори и техните свойства.		Затвърждава уменията да извършва операциите събиране и изваждане на вектори и техните свойства.	Работа в час. Домашна работа	
14.	5	Умножение на вектор с число. Свойства	Нови знания	Знае операцията умножение на вектор с число и нейните свойства.	произведение на вектор с число, колинеарни вектори; неколинеарни вектори	Умее да извършва операцията умножение на вектор с число и нейните свойства	Работа в час. Домашна работа	

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия	Контекст и дейности за всяка урочна единица	Методи и форми на оценяване по теми и/или раздели	Забележка
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
15.	5	Умножение на вектор с число. Упражнение	Упражнение	Затвърждава знанията за операцията умножение на вектор с число и нейните свойства. Знае в конкретна ситуация как се представя вектор като линейна комбинация на вектори.		Затвърждава уменията да извършва операцията умножение на вектор с число и нейните свойства. Умее в конкретна ситуация да представя вектор като линейна комбинация на вектори.	Работа в час. Домашна работа – може да се даде темата за самоконтрол.	
16.	6	Вектори	Тема за самоконтрол	Умее да прилага знанията си при действия с вектори.		Диагностика до колко умее да извършава операции с вектори.	Писмена работа	
17.	6	Делене на отсечка в дадено отношение	Нови знания	Знае понятието „отношение на отсечки“.	отношение на отсечки	Умее да намира отношение на отсечки.	Работа в час. Домашна работа	
18.	6	Средна отсечка в триъгълник	Нови знания	Знае понятието „средна отсечка в триъгълник“ и свойствата ѝ.	средна отсечка в триъгълник	Умее да използва понятието „средна отсечка в триъгълник“ и свойствата ѝ.	Работа в час. Домашна работа	
19.	7	Средна отсечка в триъгълник. Упражнение	Упражнение	Затвърждава знанията за средна отсечка в триъгълник и свойствата ѝ. Знае ситуации, свързани със средни отсечки.		Затвърждава уменията да използва понятието „средна отсечка в триъгълник“ и свойствата ѝ. Умее да открива и създава ситуации, свързани със средни отсечки.	Работа в час. Домашна работа	

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия	Контекст и дейности за всяка урочна единица	Методи и форми на оценяване по теми и/или раздели	Забележка
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
20.	7	Медицентър в триъгълник	Нови знания	Знае понятието „медицентър в триъгълник“ и свойствата му.	медицентър в триъгълник	Умее да използва понятието „медицентър в триъгълник“ и свойствата му.	Работа в час. Домашна работа	
21.	7	Медицентър в триъгълник. Упражнение	Упражнение	Затвърждава знанията за медицентър в триъгълник и свойствата му.		Затвърждава уменията да използва понятието „медицентър в триъгълник“ и свойствата му. Умее да открива и създава ситуации, свързани със медицентър в триъгълник.	Устно изпитване. Домашна работа	
22.	8	Трапец. Равнобедрен трапец	Нови знания	Знае понятията „трапец“ и „равнобедрен трапец“.	трапец; равнобедрен трапец	Умее да използва понятията „трапец“ и „равнобедрен трапец“. Умее да прилага свойствата на равнобедрен трапец.	Работа в час. Домашна работа	
23.	8	Трапец. Равнобедрен трапец. Упражнение	Упражнение	Затвърждава знанията за понятията „трапец“ и „равнобедрен трапец“.		Умее да разграничава твърденията като необходими и достатъчни условия	Работа в час. Устно изпитване. Домашна работа	
24.	8	Средна отсечка (основа) на трапец	Нови знания	Знае понятието „средна отсечка“ (основа) на трапец.	средна отсечка (основа) на трапец	Умее да открива и създава ситуации, свързани със средни отсечки.	Работа в час. Домашна работа	

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия	Контекст и дейности за всяка урочна единица	Методи и форми на оценяване по теми и/или раздели	Забележка
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
25.	9	Средна отсечка на трапец. Упражнение	Упражнение	Затвърждава знанията за понятието „средна отсечка“ (основа) на трапец.		Умее да анализира условието на твърдение и да избира подходящи средства за доказателство.	Работа в час. Устно изпитване. Домашна работа	
26.	9	Триъгълник и трапец. Тема за самоконтрол	Контрол	Знае понятията „отношение на отсечки“, „средна отсечка в триъгълник“, „медицентър“ на триъгълник, „средна отсечка“ (основа) на трапец.		Диагностика до колко умее да открива и създава ситуации, свързани със средни отсечки, и дали умее да анализира условието на твърдение и да избира подходящи средства за доказателството му.	Писмена работа	
27.	9	Ирационални числа. Квадратен корен	Нови знания	Знае кои числа са ирационални и какво е квадратен корен от неотрицателно число.	квадратен корен, радикал, подкоренна величина, ирационални числа	Знае как се намира квадратен корен.	Работа в час. Домашна работа	
28.	10	Ирационални числа. Приближена стойност на квадратен корен	Нови знания	Знае как се намира приближена стойност на квадратен корен.	приближена стойност	Намира приближена стойност на квадратен корен.	Работа в час. Домашна работа	
29.	10	Свойства на квадратните корени	Нови знания	Знае свойствата на квадратните корени.		Намира квадратен корен, като използва свойствата на квадратните корени.	Работа в час. Домашна работа	

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия	Контекст и дейности за всяка урочна единица	Методи и форми на оценяване по теми и/или раздели	Забележка
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
30.	10	Действия с квадратни корени	Нови знания	Знае правилата за умножение и деление на корени.		Извършва действия с квадратни корени.	Работа в час. Домашна работа	
31.	11	Действия с квадратни корени. Упражнение	Упражнение	Затвърждава знанията за действия с квадратни корени.			Устно изпитване. Работа в час. Домашна работа	
32.	11	Сравняване на ирационални числа, записани с квадратни корени	Нови знания	Знае как се сравняват квадратни корени.		Сравнява квадратни корени и изрази, съдържащи квадратни корени.	Работа в час. Домашна работа	
33.	11	Преобразуване на изрази, съдържащи квадратни корени	Нови знания	Знае как се преобразуват изрази с квадратни корени.		Преобразува изрази, съдържащи квадратни корени, като използва формулите за съкратено умножение.	Работа в час. Домашна работа	
34.	12	Сравняване на ирационални числа и преобразуване на изрази, съдържащи квадратни корени. Упражнение	Упражнение	Затвърждава знанията за преобразуване на квадратни корени.			Устно изпитване. Работа в час. Домашна работа	
35.	12	Рационализиране на изрази, съдържащи квадратни корени	Нови знания	Знае как се рационализира дроб.		Рационализира дроб.	Работа в час. Домашна работа	
36.	12	Квадратен корен. Обобщение	Обобщение	Затвърждава знанията за квадратни корени.			Устно изпитване. Работа в час. Домашна работа	

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия	Контекст и дейности за всяка урочна единица	Методи и форми на оценяване по теми и/или раздели	Забележка
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
37.	13	Квадратен корен. Тема за самоконтрол	Контрол	Проверка на знанията.			Писмено изпитване	
38.	13	Квадратно уравнение. Непълни квадратни уравнения	Нови знания	Знае кое уравнение е квадратно, понятията, свързани с него, и видовете квадратни уравнения.	квадратно уравнение, коефициенти на квадратното уравнение, непълно квадратно уравнение	Умее да определя коефициентите на квадратно уравнение и как се решават непълни квадратни уравнения.	Работа в час. Домашна работа	
39.	13	Формула за корените на квадратното уравнение	Нови знания	Знае и използва формулата за решаване на пълни квадратни уравнения.	дискриминанта на квадратно уравнение, двоен корен	Умее да прилага формулата за намиране на корените на квадратно уравнение.	Работа в час. Домашна работа	
40.	14	Формула за корените на квадратното уравнение. Упражнение	Упражнение	Затвърждава знанията си за решаване на квадратни уравнения.		Усвоява технически похвати при решаване на квадратни уравнения.	Устно изпитване. Работа в час. Домашна работа	
41.	14	Съкратена формула за корените на квадратното уравнение	Нови знания	Знае съкратената формула за намиране на корените на квадратно уравнение.	съкратена формула	Прилага съкратената формула.	Работа в час. Домашна работа	

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия	Контекст и дейности за всяка урочна единица	Методи и форми на оценяване по теми и/или раздели	Забележка
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
42.	14	Зависимости между корените и коефициентите на квадратното уравнение. Формули на Виет	Нови знания	Знае какви зависимости има между корените на квадратното уравнение.		Умее да прилага правата и обратната теорема на Виет.	Работа в час. Домашна работа	
43.	15	Зависимости между корените и коефициентите на квадратното уравнение. Формули на Виет. Упражнение	Упражнение	Прилага теоремите на Виет за решаване на квадратни уравнения и за съставяне на квадратно уравнение по зададени корени.		Съобразява кои са корените на някои уравнения. Умее да съставя квадратни уравнения, чиито корени са в определена зависимост спрямо корените на дадено уравнение.	Работа в час. Домашна работа	
44.	15	Приложения на формулите на Виет	Упражнение	Прилага теоремите на Виет за пресмятане на симетрични изрази и за определяне на знаците на корените на квадратно уравнение.	симетричен израз	Умее да преобразува симетричен израз на корените и да определя знаците на корените на квадратно уравнение.	Устно изпитване. Работа в час. Домашна работа	
45.	15	Разлагане на квадратния тричлен на множители	Нови знания	Знае да разлага на множители квадратен тричлен.	квадратен тричлен, корени на квадратния тричлен	Прилага теоремата за разлагане на квадратния тричлен.	Работа в час. Домашна работа	
46.	16	Решаване на уравнения от по-висока степен чрез разлагане на множители	Нови знания	Знае да решава уравнения от по-висока степен чрез разлагане.	кубично уравнение	Разлага на множители изрази от по-висока от втора степен.	Работа в час. Домашна работа	

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия	Контекст и дейности за всяка урочна единица	Методи и форми на оценяване по теми и/или раздели	Забележка
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
47.	16	Решаване на уравнения от по-висока степен чрез разлагане на множители. Упражнение	Упражнение	Затвърждава знанията си за решаване на уравнения от по-висока степен чрез разлагане.		Усвоява различни похвати за решаване на уравнения чрез разлагане на множители.	Устно изпитване. Работа в час. Домашна работа	
48.	16	Решаване на уравнения от по-висока степен чрез въвеждане на помощно неизвестно	Нови знания	Знае да решава уравнения от по-висока степен чрез полагане.	биквадратно уравнение, биквадратен тричлен	Въвежда подходящо неизвестно при решаване на уравнения.	Работа в час. Домашна работа	
49.	17	Решаване на уравнения от по-висока степен чрез въвеждане на помощно неизвестно. Упражнение	Упражнение	Затвърждава уменията за решаване на уравнения от по-висока степен чрез полагане. Знае да разлага биквадратния тричлен на множители.		Определя знаците на корените на биквадратно уравнение и разлага биквадратен тричлен на множители.	Устно изпитване. Работа в час. Домашна работа	
50.	17	Моделиране с квадратни уравнения	Нови знания	Знае как се моделират различни ситуации с уравнения, свеждащи се до квадратни.		Отчита етапите при решаване на текстови задачи.	Работа в час. Домашна работа	
51.	17	Моделиране с квадратни уравнения. Упражнение	Упражнение	Знае как да оценява формално и интерпретира съдържателно резултати, получени от решението на математически модел.		Прилага закони от механиката за решаване на практически задачи.	Работа в час. Домашна работа	

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия	Контекст и дейности за всяка урочна единица	Методи и форми на оценяване по теми и/или раздели	Забележка
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
52.	18	Квадратни уравнения. Тема за самоконтрол	Контрол	Проверка на знанията			Писмено изпитване	
53.	18	Класна работа	Контрол	Проверка на знанията			Писмено изпитване	
54.	18	Взаимни положения на точка и права с окръжност	Нови знания	Знае как да определя взаимни положения на точка и права с окръжност.	външна и вътрешна точка за окръжност, допирателна и секуща на окръжност, допирна точка	Прилага критериите за определяне на взаимните положения на точка и права с окръжност.	Работа в час. Домашна работа	

ВТОРИ УЧЕБЕН СРОК – 18 СЕДМИЦИ Х 3 ЧАСА СЕДМИЧНО = 54 ЧАСА

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия	Контекст и дейности за всяка урочна единица	Методи и форми на оценяване по теми и/или раздели	Забележка
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
55.	19	Взаимни положения на точка и права с окръжност. Упражнение	Упражнение	Знае кое е геометричното място на върховете на правоъгълните триъгълници с обща хипотенуза.	геометрично място на точки	Определя взаимните положения на точка и права с окръжност.	Работа в час. Домашна работа	
56.	19	Допирателни към окръжност през външна точка	Нови знания	Знае свойствата на допирателните през външна точка.	допирателни отсечки	Прилага свойствата на допирателните.	Работа в час. Домашна работа	

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия	Контекст и дейности за всяка урочна единица	Методи и форми на оценяване по теми и/или раздели	Забележка
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
57.	19	Централни ъгли, дъги и хорди	Нови знания	Знае основните понятия, свързани с окръжност, и връзките между централни ъгли и съответните им дъги и хорди.	централен ъгъл, принадлежаща дъга, градусна мярка на дъга, равни дъги	Запознава се с означенията при изразяване на връзките между централен ъгъл и дъга.	Работа в час. Домашна работа	
58.	20	Централни ъгли, дъги и хорди. Упражнение	Упражнение	Знае как да прилага зависимостите между централни ъгли, дъги и хорди в окръжност.	вписан многоъгълник, описана окръжност	Решава задачи, свързани с разглежданата тема.	Устно изпитване. Работа в час. Домашна работа	
59.	20	Диаметър, перпендикулярен на хорда	Нови знания	Знае основните твърдения, свързани с диаметър, перпендикулярен на хорда.		Запознаване със свойствата и признаците, свързани с перпендикулярност на диаметър и хорда.	Работа в час. Домашна работа	
60.	20	Диаметър, перпендикулярен на хорда. Упражнение	Упражнение	Знае да прилага свойства на хорди в окръжност.		Запознава се със свойството на успоредните хорди.	Работа в час. Домашна работа	
61.	21	Вписан ъгъл	Нови знания	Знае свойството на вписан ъгъл.	вписан ъгъл, съответен централен ъгъл, съответна дъга	Доказва свойството на вписан ъгъл.	Работа в час. Домашна работа	
62.	21	Вписан ъгъл. Упражнение	Упражнение	Умее да прилага свойството на вписан ъгъл.		Решава задачи, свързани с разглежданата тема.	Работа в час. Домашна работа	
63.	21	Периферен ъгъл	Нови знания	Знае свойството на периферен ъгъл.	периферен ъгъл, съответен централен ъгъл, съответна дъга	Доказва свойството на периферен ъгъл.	Работа в час. Домашна работа	

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия	Контекст и дейности за всяка урочна единица	Методи и форми на оценяване по теми и/или раздели	Забележка
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
64.	22	Периферен ъгъл. Упражнение	Упражнение	Умее да прилага свойството на периферен ъгъл.		Решава задачи, свързани с разглежданата тема.	Устно изпитване. Работа в час. Домашна работа	
65.	22	Ъгъл, чийто връх е вътрешна или външна точка за окръжност	Нови знания	Знае свойството на ъгъл, чийто връх е вътрешна или външна точка за окръжност.	Съответни дъги на ъгъл, чийто връх е вътрешна или външна точка за окръжност.	Доказва свойството на ъгъл, чийто връх е вътрешна или външна точка за окръжност.	Работа в час. Домашна работа	
66.	22	Ъгъл, чийто връх е вътрешна или външна точка за окръжност. Упражнение	Упражнение	Умее да прилага свойството на ъгъл, чийто връх е вътрешна или външна точка за окръжност.		Решава задачи, свързани с разглежданата тема.	Работа в час. Домашна работа	
67.	23	Взаимно положение на две окръжности	Нови знания	Знае различните положения на две окръжности и признаците за определянето им.	Видове окръжности: външни една на друга; външно допирателни; пресекателни; вътрешно допирателни; едната окръжност е вътрешна за другата. Концентрични окръжности. Централа на две окръжности.	Запознава се с определенията и признаците за установяване на взаимните положения на две окръжности.	Работа в час. Домашна работа	

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия	Контекст и дейности за всяка урочна единица	Методи и форми на оценяване по теми и/или раздели	Забележка
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
68.	23	Взаимно положение на две окръжности. Упражнение	Упражнение	Умее да прилага знанията си за различните положения на две окръжности.		Решава задачи, свързани с разглежданата тема.	Работа в час. Домашна работа	
69.	24	Общи допирателни на две окръжности	Нови знания	Знае как се определя броят на общите допирателни на две окръжности.	обща допирателна, външна допирателна, вътрешна допирателна	Запознава се с новите понятия и твърденията, свързани с тях.	Работа в час. Домашна работа	
70.	24	Общи допирателни на две окръжности. Упражнение	Упражнение	Умее да доказва факти, свързани с общи допирателни на две окръжности.		Решава задачи, свързани с разглежданата тема.	Устно изпитване. Работа в час. Домашна работа.	
71.	24	Окръжност. Обобщение	Обобщение	Затвърждава знанията за окръжност. Умее да разграничава твърденията от раздела като необходими и достатъчни условия.		Решава общи задачи от раздела.	Устно изпитване. Работа в час. Домашна работа	
72.	25	Окръжност. Тема за самоконтрол	Контрол				Писмено изпитване	
73.	25	Рационални дроби. Дефиниционно множество	Нови знания	Знае понятията „рационална дроб“, „дефиниционно множество“, „допустими стойности“ и „тъждество“.	рационални дроби, дефиниционно множество, допустими стойности, тъждество	Умее да намира дефиниционно множество и умее да пресмята числена стойност на рационален израз.	Работа в час. Домашна работа	

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия	Контекст и дейности за всяка урочна единица	Методи и форми на оценяване по теми и/или раздели	Забележка
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
74.	25	Основно свойство на рационалните дроби. Съкращаване и разширяване на рационални дроби	Нови знания	Знае алгоритъм за разширяване и съкращаване на рационални дроби.		Умее да разширява и съкращава рационални дроби.	Работа в час. Домашна работа	
75.	26	Привеждане на рационални дроби към общ знаменател	Нови знания	Знае алгоритъм за привеждане на рационални дроби към общ знаменател.		Умее да привежда дроби към общ знаменател.	Работа в час. Домашна работа	
76.	26	Събиране и изваждане на рационални дроби	Нови знания	Знае алгоритмите за събиране и изваждане на рационални дроби.		Умее да събира и изважда рационални дроби.	Работа в час. Домашна работа	
77.	26	Събиране и изваждане на рационални дроби. Упражнение	Упражнение				Работа в час. Домашна работа	
78.	27	Умножение, деление и степенуване на рационални дроби	Нови знания	Знае алгоритмите за умножение, деление и степенуване на рационални дроби.		Умее да умножава, да дели и да повдига в степен рационални дроби.	Работа в час. Домашна работа	
79.	27	Преобразуване на рационални изрази	Нови знания	Знае алгоритмите за операциите с рационални изрази.		Умее да прилага алгоритмите за действия с рационални дроби.	Работа в час. Домашна работа	
80.	27	Преобразуване на рационални изрази. Упражнение	Упражнение				Работа в час. Домашна работа	

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия	Контекст и дейности за всяка урочна единица	Методи и форми на оценяване по теми и/или раздели	Забележка
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
81.	28	Дробни уравнения	Нови знания	Знае алгоритъм за решаване на дробни рационални уравнения, свеждащи се до линейни или квадратни уравнения.	дробни уравнения	Умее да решава дробни рационални уравнения, свеждащи се до линейни или квадратни уравнения.	Работа в час. Домашна работа	
82.	28	Дробни уравнения. Упражнение	Упражнение	Затвърждава знанието как да решава дробни рационални уравнения, свеждащи се до линейни или квадратни уравнения.		Затвърждава умението да решава дробни рационални уравнения, свеждащи се до линейни или квадратни уравнения.	Работа в час. Домашна работа	
83.	28	Моделиране с дробни уравнения	Нови знания	Знае как се моделират различни ситуации с уравнения, свеждащи се до дробни.	математически модел	Умее да моделира различни ситуации с уравнения, свеждащи се до дробни, и да оценява формално и интерпретира съдържателно резултати, получени от решението на математическия модел.	Устно изпитване. Работа в час. Домашна работа	

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия	Контекст и дейности за всяка урочна единица	Методи и форми на оценяване по теми и/или раздели	Забележка
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
84.	29	Моделиране с дробни уравнения. Упражнение	Упражнение	Затвърждаване на знанието да моделира различни ситуации с уравнения, свеждащи се до дробни.		Затвърждаване на умението да моделира различни ситуации с уравнения, свеждащи се до дробни, и да оценява формално и интерпретира съдържателно резултати, получени от решението на математическия модел.	Устно изпитване. Работа в час. Домашна работа	
85.	29	Рационални дроби. Обобщение	Обобщение	Знае алгоритмите за операциите с рационални изрази.		Умее да пресмята числена стойност на рационален израз, да извършва тъждествени преобразувания на рационални изрази, да доказва тъждества и да решава дробни рационални уравнения, свеждащи се до линейни или квадратни уравнения.	Устно изпитване. Работа в час. Домашна работа	

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия	Контекст и дейности за всяка урочна единица	Методи и форми на оценяване по теми и/или раздели	Забележка
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
86.	29	Рационални дроби. Тема за самоконтрол	Контрол	Знае да пресмята числена стойност на рационален израз, да извършва тъждествени преобразувания на рационални изрази, да доказва тъждества и да решава дробни рационални уравнения, свеждащи се до линейни или квадратни уравнения. Знае да използва логическите съюзи „и“ и „или“, кванторите „за всяко“ и „съществува“ и релацията „еквивалентност“ при преобразуване на рационални изрази и при решаване на рационални уравнения. Използва отрицание на твърдение при определяне на допустими и недопустими стойности на рационални изрази, преценява рационалност при избор на алгоритъм за преобразуване на дробни изрази и решаване на дробни уравнения, моделира различни ситуации с уравнения, свеждащи се до дробни.		Диагностика доколко умее да прилага алгоритмите за операциите с рационални изрази и на умението да моделира различни ситуации с уравнения, свеждащи се до дробни, да оценява формално и интерпретира съдържателно резултати, получени от решението на математическия модел.	Писмено изпитване	

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия	Контекст и дейности за всяка урочна единица	Методи и форми на оценяване по теми и/или раздели	Забележка
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
87.	30	Окръжност, описана около триъгълник	Нови знания	Знае какво е описана окръжност и как се намира центърът ѝ.	описана окръжност около триъгълник и център на описана окръжност	Определя центъра на описаната окръжност и намира ъгли, свързани с него.	Работа в час. Домашна работа	
88.	30	Окръжност, вписана в триъгълник	Нови знания	Знае какво е вписана окръжност и как се намира центърът ѝ.	вписана окръжност около триъгълник и център на вписана окръжност	Определя центъра на вписаната окръжност и намира ъгли, свързани с него.	Работа в час. Домашна работа	
89.	30	Описана и вписана окръжност. Упражнение	Упражнение	Затвърждава знанията за описана и вписана окръжност.			Устно изпитване. Работа в час. Домашна работа	
90.	31	Външновписана окръжност	Нови знания	Знае какво е външновписана окръжност и как се намира центърът ѝ.	външновписана окръжност около триъгълник и център на външновписана окръжност	Определя центъра на външновписаната окръжност и намира ъгли, свързани с него.	Работа в час. Домашна работа	
91.	31	Ортоцентър в триъгълник	Нови знания	Знае какво е ортоцентър на триъгълник	Ортоцентър	Намира ъгли, свързани с ортоцентъра на триъгълник.	Работа в час Домашна работа	
92.	31	Забележителни точки в триъгълник. Упражнение	Упражнение	Затвърждава знанията за медицентър, център на описаната окръжност, център на вписаната окръжност и ортоцентър.			Устно изпитване. Работа в час. Домашна работа	

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия	Контекст и дейности за всяка урочна единица	Методи и форми на оценяване по теми и/или раздели	Забележка
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
93.	32	Вписан четириъгълник	Нови знания	Знае кога четириъгълник е вписан в окръжност.	четириъгълник, вписан в окръжност, център на окръжност, описана около четириъгълник	Намира център на описана окръжност и ъгли на вписани четириъгълници.	Работа в час. Домашна работа	
94.	32	Четириъгълник, описан около окръжност	Нови знания	Знае кога четириъгълник е описан около окръжност.	четириъгълник, описан около окръжност, център на окръжност, вписана в четириъгълник.	Намира центъра на вписана окръжност и страни на описани четириъгълници.	Работа в час. Домашна работа	
95.	32	Вписани и описани четириъгълници. Упражнение	Упражнение	Затвърждава знанията за вписани и описани четириъгълници.			Устно изпитване. Работа в час. Домашна работа	
96.	33	Вписани и описани многоъгълници. Тема за самоконтрол	Контрол	Проверка на знанията.			Писмено изпитване	
97.	33	Класна работа	Контрол	Проверка на знанията.			Писмено изпитване	
98.	33	Основни комбинаторни понятия	Годишен преговор	Проверка на знанията за броене. Знае основните комбинаторни понятия и умее да пресмята броя на различни съединения.		Прилагане на основните формули при пресмятане на съединения.	Устно изпитване. Работа в час. Домашна работа	

№ по ред	Учебна седмица	Тема на урочната единица	Урочна единица за	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия	Контекст и дейности за всяка урочна единица	Методи и форми на оценяване по теми и/или раздели	Забележка
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
99.	34	Вектор. Средна отсечка в триъгълник и трапец	Годишен преговор	Проверка на знанията за вектори, средна отсечка, триъгълник и трапец.		Намиране на сбор и разлика на вектори и решаване на задачи, свързани със средна отсечка в триъгълник и трапец.	Устно изпитване. Работа в час. Домашна работа	
100.	34	Квадратен корен. Квадратно уравнение	Годишен преговор	Знае и умее да прилага основни свойства на корените. Умее да решава квадратни уравнения и уравнения от по-висока степен.		Прилагане на основни похвати при решаване на задачи по преговаряните теми.	Оценяване от работа в часа	
101.	35	Окръжност	Годишен преговор	Знае основните понятия и умее да прилага важни зависимости, свързани с окръжностите.		Прилагане на основни похвати при решаване на задачи по преговаряните теми.	Оценяване от работа в часа	
102.	35	Рационални дроби	Годишен преговор	Знае правилата за пресмятане с рационални дроби.		Пресмятане на изрази с рационални дроби.	Устно изпитване. Работа в час. Домашна работа	
103.	36	Вписани и описани многоъгълници	Годишен преговор	Проверка на знанията за вписани и описани многоъгълници. Знае свойствата на вписаните и описаните триъгълници и четириъгълници.		Намиране на ъгли и страни на вписани и описани многоъгълници чрез използване на свойствата им.	Устно изпитване. Работа в час. Домашна работа	
105.	36	Изходно равнище.	Контрол					

Приложение № 14 към т. 14

УЧЕБНА ПРОГРАМА ПО МАТЕМАТИКА ЗА VIII КЛАС (ОБЩООБРАЗОВАТЕЛНА ПОДГОТОВКА)

КРАТКО ПРЕДСТАВЯНЕ НА УЧЕБНАТА ПРОГРАМА

Обучението по **математика** в VIII клас е насочено към овладяване на базисни знания, умения и отношения, свързани с постигане на изискванията за резултатите от обучението по учебния предмет **математика** и с изграждане на ключови компетентности на ученика.

ОЧАКВАНИ РЕЗУЛТАТИ В КРАЯ НА КЛАСА

Области на компетентности	Знания, умения и отношения *В резултат на обучението си ученикът:*
Числа. Алгебра	• Сравнява реални числа и извършва операциите събиране, изваждане, умножение, деление и степенуване; • Пресмята числови изрази в множеството на реалните числа; • Извършва тъждествени преобразувания на рационални и ирационални изрази (съдържащи квадратни корени); • Умее да решава квадратни уравнения по формулата за намиране на корените им; • Умее да прилага формулите за връзка между корени и коефициенти на квадратно уравнение; • Умее да решава дробни уравнения, свеждащи се до линейни и квадратни.
Фигури и тела	• Знае основните равнинни геометрични фигури: триъгълник, четириъгълник, правилен многоъгълник и окръжност; • Знае основните забележителни точки в триъгълник и може да прилага техните свойства; • Знае взаимното положение на прави и окръжности и може да прилага техните свойства; • Определя по вид и намира ъгли, свързани с окръжност, познава вписани и описани многоъгълници.
Функции. Измерване	• Дели отсечка в дадено отношение в конкретни ситуации.
Логически знания	• Разбира на конкретно ниво смисъла на логическите съюзи „и“, „или“, „ако..., то...“, отрицанието „не“ и на релациите „следва“ и „еквивалентност“; • Преценява вярност и рационалност в конкретна ситуация и умее да обосновава изводи; • Умее да разграничава конкретни твърдения като необходими и достатъчни условия; • Образува на конкретно ниво отрицание на просто съждение.
Елементи от вероятности и статистика	• Разпознава и пресмята комбинаторни съединения без повторения; • Умее да прилага основни правила за събиране и умножение в комбинаториката.
Моделиране	• Знае понятието вектор, операциите събиране и изваждане на вектори, умножение на вектор с число; • Оценява съдържателно получен резултат, коректност на аргументи и ги интерпретира; предвижда в определени рамки очакван от моделирането резултат; • Моделира с уравнения, свеждащи се до квадратни; • Моделира с дробни уравнения; • Моделира с пермутации, вариации и комбинации.

УЧЕБНО СЪДЪРЖАНИЕ

Теми	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия
✓**1. Основни комбинаторни понятия** ✓1.1. Умножение и събиране на възможности. ✓1.2. Пермутации, вариации и комбинации.	• Умее да пресмята възможности по правилата за събиране и за умножение; • Умее да пресмята пермутации, вариации и комбинации без повторение; • Умее да моделира конкретни ситуации.	✓Съединение без повторение, ✓пермутации без повторение от *n* елемента, ✓вариации без повторение от *n* елемента *k*-ти клас, ✓комбинации без повторение от *n* елемента *k*-ти клас, ✓граф-дърво.
✓**2. Вектори** ✓2.1. Вектор. ✓2.2. Събиране и изваждане на вектори. Свойства. ✓2.3. Умножение на вектор с число. Свойства.	• Знае понятието вектор и понятията, свързани с него; • Умее да извършва операциите с вектори; • Умее в конкретна ситуация да представя вектор като линейна комбинация на вектори.	✓Насочена отсечка, ✓вектор, ✓нулев вектор, ✓дължина на вектор, ✓посока на вектор, ✓еднопосочни вектори, ✓противопосочни вектори, ✓равни вектори, ✓противоположни вектори, ✓сбор на вектори, ✓разлика на вектори, ✓произведение на вектор с число, ✓колинеарни вектори; ✓неколинеарни вектори.
✓**3. Триъгълник и трапец** ✓3.1. Делене на отсечка в дадено отношение. ✓3.2. Средна отсечка в триъгълник. ✓3.3. Медицентър на триъгълник. ✓3.4. Трапец. Равнобедрен трапец. ✓3.5. Средна отсечка (основа) на трапец.	• Умее да намира отношение на отсечки; • Знае понятието средна отсечка в триъгълник, свойствата ѝ и умее да ги използва; • Умее да прилага свойствата на медицентър на триъгълник; • Умее да прилага свойствата на равнобедрен трапец; • Знае понятието средна отсечка в трапец, свойствата ѝ и умее да ги използва; • Умее да открива и създава ситуации, свързани със средни отсечки; • Умее да разграничава твърденията от темата като необходими и достатъчни условия; • Умее да образува отрицание на твърдения, съдържателно свързани с темата; • Умее да анализира условието на твърдение и да избира подходящи средства за доказателство.	✓Отношение на отсечки, ✓средна отсечка в триъгълник, ✓медицентър на триъгълник, ✓средна отсечка (основа) в трапец.

Теми	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия
✓**4. Квадратен корен** ✓4.1. Ирационални числа. Квадратен корен. ✓4.2. Свойства на квадратните корени. ✓4.3. Действия с квадратни корени. ✓4.4. Сравняване на ирационални числа, записани с квадратни корени. ✓4.5. Преобразуване на изрази, съдържащи квадратни корени. ✓4.6. Рационализиране на изрази, съдържащи квадратни корени.	• Знае понятието квадратен корен на неотрицателно число и свойствата му; • Умее да сравнява квадратни корени и изрази, съдържащи квадратни корени; • Умее да извършва действия с квадратни корени; • Знае приближена стойност на корен; • Умее да рационализира дроб.	✓Квадратен корен, ✓ирационално число, ✓реални числа, ✓подкоренна величина, ✓коренуване, ✓радикал.
✓**5. Квадратни уравнения** ✓5.1. Квадратно уравнение. Непълни квадратни уравнения. ✓5.2. Формула за корените на квадратното уравнение. ✓5.3. Съкратена формула за корените на квадратното уравнение. ✓5.4. Разлагане на квадратния тричлен на множители. ✓5.5. Биквадратно уравнение. ✓5.6. Уравнения от по-висока степен, свеждащи се до квадратни. ✓5.7. Зависимости между корените и коефициентите на квадратното уравнение. Формули на Виет. ✓5.8. Приложение на формулите на Виет. ✓5.9. Моделиране с квадратни уравнения.	• Знае понятието квадратно уравнение, понятията, свързани с него, и видовете квадратни уравнения; • Знае пълна и кратка формула за корените на квадратно уравнение и умее да ги прилага; • Умее да разлага на множители квадратен тричлен; • Умее да решава уравнения, свеждащи се до квадратни; • Умее да решава уравнения от по-висока степен чрез: – разлагане; – полагане; • Умее да преценява вярност и рационалност в конкретна ситуация; • Знае и умее да прилага теоремите на Виет за: – определяне знаците на корените на квадратно уравнение; – съставяне на квадратно уравнение по зададени корени; • Моделира различни ситуации с уравнения, свеждащи се до квадратни; • Оценява формално и интерпретира съдържателно резултати, получени от решението на математически модел.	✓Квадратен тричлен, ✓квадратно уравнение, ✓коефициенти на квадратно уравнение, ✓пълно квадратно уравнение, ✓непълно квадратно уравнение, ✓дискриминанта на квадратно уравнение, ✓двоен (двукратен) корен, ✓биквадратно уравнение.

Теми	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия
✓**6. Окръжност** ✓**6.1.** Окръжност. Взаимни положения на точка и окръжност. ✓6.2. Взаимни положения на права и окръжност. ✓6.3. Допирателни към окръжност. ✓5.4. Централни ъгли, дъги и хорди. ✓6.5. Диаметър, перпендикулярен на хорда. ✓6.6. Вписан ъгъл. ✓6.7. Периферен ъгъл. ✓6.8. Ъгъл, чийто връх е вътрешна точка за окръжност. ✓6.9. Ъгъл, чийто връх е външна точка за окръжност. ✓6.10. Взаимно положение на две окръжности. ✓6.11. Общи допирателни на две окръжности.	• Знае и може да определя взаимни положения на – точка и окръжност; – права и окръжност; – две окръжности; • Знае и умее да прилага свойства на хорди в окръжност; • Знае видовете ъгли, свързани с окръжност, твърденията за тях и умее да ги прилага. • Умее да разграничава твърденията от темата като необходими и достатъчни условия.	✓Вътрешна точка за окръжност, ✓външна точка за окръжност, ✓допирателна към окръжност, ✓допирна точка, ✓секуща на окръжност, ✓принадлежаща дъга на централен ъгъл, ✓вписан ъгъл, ✓периферен ъгъл, ✓ъгъл, чийто връх е вътрешна точка за окръжност, ✓ъгъл, чийто връх е външна точка за окръжност, ✓външнодопирателни окръжности, ✓вътрешнодопирателни окръжности, ✓концентрични окръжности, ✓пресичащи се окръжности, ✓централа на две окръжности, ✓обща допирателна към две окръжности.
✓**7. Рационални изрази** ✓7.1. Рационални дроби. Дефиниционно множество. ✓7.2. Основно свойство на рационалните дроби. Съкращаване и разширяване на рационални дроби. ✓7.3. Привеждане на рационалните дроби към общ знаменател. ✓7.4. Събиране и изваждане на рационални дроби. ✓7.5. Умножение, деление и степенуване на рационални дроби. ✓7.6. Преобразуване на рационални изрази. ✓7.7. Дробни уравнения. ✓7.8. Моделиране с дробни уравнения.	• Знае алгоритмите за операциите с рационални изрази; • Умее да: – пресмята числена стойност на рационален израз; – извършва тъждествени преобразувания на рационални изрази; – доказва тъждества; – решава дробни рационални уравнения, свеждащи се до линейни или квадратни уравнения; • Използва: – логическите съюзи „и” и „или”; – кванторите „за всяко” и „съществува”, – релацията „еквивалентност” при преобразуване на рационални изрази и при решаване на рационални уравнения; • Използва отрицание на твърдение при определяне на допустими и недопустими стойности на рационални изрази; • Преценява рационалност при избор на алгоритъм за преобразуване на дробни изрази и решаване на дробни уравнения; • Моделира различни ситуации с уравнения, свеждащи се до дробни; • Оценява формално и интерпретира съдържателно резултати, получени от решението на математическия модел.	✓Рационална дроб, ✓дефиниционно множество, ✓допустими стойности, ✓тъждество, ✓дробно уравнение.

Теми	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия
✓**8. Вписани и описани многоъгълници** ✓8.1. Окръжност, описана около триъгълник. ✓8.2. Окръжност, вписана в триъгълник. ✓8.3. Външновписани окръжности. ✓8.4. Ортоцентър на триъгълник. Забележителни точки в триъгълника. ✓8.5. Четириъгълник, вписан в окръжност. ✓8.6. Четириъгълник, описан около окръжност.	• Знае забележителни точки на триъгълник и твърдения, свързани с тях; • Умее да построява вътрешно- и външновписана окръжност за триъгълник; • Знае необходими и достатъчни условия за вписани и описани четириъгълници и умее да ги прилага.	✓Описана окръжност около триъгълник, ✓център на описана окръжност около триъгълник, ✓вписана окръжност в триъгълник, ✓център на вписана окръжност в триъгълник, ✓външновписана окръжност за триъгълник, ✓център на външновписана окръжност за триъгълник; ✓ортоцентър, ✓четириъгълник, вписан в окръжност, ✓център на окръжност, описана около четириъгълник, ✓четириъгълник, описан около окръжност, ✓център на окръжност, вписана в четириъгълник.

Годишен брой учебни часове в осми клас – 108 часа.

• При реализация на програмата спазването на хронологията в тематичното разпределение на съдържанието е задължително.

• Разпределението на съдържанието, включено в посочените в програмата подтеми (заглавия с двойна номерация), се прави по преценка на този, който я реализира (автори на учебници и учебни помагала, преподаватели).

Препоръчително процентно разпределение на задължителните учебни часове за годината

За нови знания	до 55%
За упражнения	над 35%
За преговор	
За обобщение	
Практически дейности	
За контрол и оценка (за входно и изходно ниво, за класни и за контролни работи и проекти)	до 15%

Специфични методи и форми за оценяване на постиженията на учениците

Форми на оценяване:

Устно изпитване – оценяват се мнението и аргументите на ученика при решаването на конкретна математическа задача.

Писмено изпитване – оценява се постигането на стандартите чрез кратки писмени индивидуални или групови изпитвания.

Контролни и класни работи – оценява се постигането на стандартите за по-големи обособени фрагменти от учебното съдържание (в края на раздел, в края на учебния срок).

Практическа работа – изпълнение на домашна работа, разработка на проект и др.

Съотношение при формиране на срочна и годишна оценка:

Текущи оценки (от устни, от писмени, от практически изпитвания)	25%
Оценки от контролни и от класни работи	50%
Оценки от други участия (работа в час, изпълнение на домашни работи, работа по проекти и др.)	25%

Дейности за придобиване на ключовите компетентности, както и междупредметни връзки

Практически дейности, които могат да се реализират в класната стая:

- Да използват динамичен софтуер за демонстрация на свойствата на геометричните фигури, което спомага за придобиване на математическа култура и ключови компетентности: умения за общуване на чужди езици; основни компетентности в областта на природните науки и технологиите; дигитална компетентност; социални и граждански компетентности; инициативност и предприемчивост.
- Да използват динамичен софтуер за построяване на образи на фигури при еднаквост.
- Да построяват (с линийка и пергел или с подходящи софтуерни продукти) несложни геометрични конструкции.
- Да използват калкулатор при решаване на практически задачи.

Установяване на междупредметни връзки:

- С физиката при темата вектори, квадратно уравнение и еднаквости. Да се търсят възможности за провеждане на съвместни уроци по подходящи теми.
- С информатиката и информационните технологии – там, където е необходимо по-добро онагледяване на учебния процес или формиране на определени практически умения. Може да се търсят възможности за провеждане на съвместни уроци с информационни технологии, например при използване на конкретен динамичен софтуер.
- С биология, физика, информатика, гражданско образование и др.

УПЪТВАНИЯ И РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ
ОТ УЧЕБНИКА ПО МАТЕМАТИКА ЗА 8. КЛАС

4. Еднакви триъгълници

3. 10 cm и 20 cm. Понеже $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BCA$, то Δ ABC е равнобедрен с $AB = BC = 2AC$. Следователно височините през A и C са равни и са два пъти по-малки от височината през B.

4. 30° и 60°. Ако M е средата на хипотенузата AB, а H е петата на височината, то $MB = \frac{1}{2}AB = 2BH$, т.е. H е среда на MB. Следователно Δ MBC е равностранен.

5. 18 cm^2. Ако M е средата на хипотенузата AB, а H е петата на височината, то $\sphericalangle BMC = 30°$, откъдето $AB = 2$, $CM = 4$, $CH = 12$ cm.

6. Нека $AB = 2\ AC$ и $\sphericalangle BAC = 60°$. Ако M е средата на AB, то Δ AMC е равностранен, а ΔMBC е равнобедрен с ъгли 30°, 30° и 120°. Следователно $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACM + \sphericalangle MCB = 90°$.

7. 70°, 50° и 60°. От $\sphericalangle AOC : \sphericalangle BOC = 23 : 25$ и $\sphericalangle AOC + \sphericalangle BOC = 240°$ следва, че $\sphericalangle AOC = 115°$ и $\sphericalangle BOC = 125°$. Тогава от Δ ABO получаваме $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC = 2(180° - 120°) = 120°$, откъдето намираме $\sphericalangle ACB = 180° - \sphericalangle BAC - \sphericalangle ABC = 60°$ и аналогично $\sphericalangle BAC = 70°$ и $\sphericalangle ABC = 50°$.

2. ОСНОВНИ КОМБИНАТОРНИ ПОНЯТИЯ

6. Умножение и събиране на възможности

1. 45 (за първата цифра има 9 възможности, а за втората – 5);

2. 36 (и за двете хвърляния има по 6 възможности);

3. 900 (за първата цифра има 9 възможности, за втората и третата по 10 и за последната само една възможност);

4. 6; **5.** 144 = 3.3.4.4; **6.** 48 = 3.2.2.4.

7. Умножение и събиране на възможности. Упражнение

1. 5.4.3.2 = 120; **2.** 2.3.2 = 12;

3. Понеже гласните букви са 6, трите букви могат да се изберат по $6^3 = 216$ начина. Трите различни ненулеви цифри могат да се изберат по 9.8.7 = 504 начина. Общо 216.504 = 108 864 начина.

4. $\dfrac{11.10}{2} = 55$ **5.** 12.11=132; **6.** $\dfrac{7.6}{2} = 21$;

7. Ако A и C са оцветени, еднакво имаме 4.3.1.3 = 36 оцветявания, а ако A и C са оцветени различно, имаме 4.3.2.2 = 48 оцветявания, общо 84 възможности.

8. От $8^а$ по 10.14 =140 начина, а от $8^б$ по 15.11=165 начина. Общо 305 начина.

8. Пермутации и вариации

1. а) $P_5 = 5.4.3.2.1 = 120$; б) $P_7 = 7.6.5.4.3.2.1 = 5040$; в) $V_4^2 = 4.3 = 12$; г) $V_6^4 = 6.5.4.3 = 360$

2. 7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5040; **3.** 9.9.8.7 = 4536; **4.** 6.6.6 = 216;

5. Буквите в английската азбука са 26. Кодовете са $26.26.10^4 = 6\ 760\ 000$.

9. Комбинации

1. а) $C_5^4 = \dfrac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = 5$; б) $C_6^4 = \dfrac{6.5}{1.2} = 15$; в) $C_7^3 = \dfrac{7.6.5}{1.2.3} = 35$; г) $C_{50}^2 = \dfrac{50.49}{1.2} = 1225$

2. а) $P_4 = 4.3.2.1 = 24$; б) $V_6^3 = 6.5.4 = 120$; в) $V_8^3 = 8.7.6 = 336$; г) $P_6 = 6.5.4.3.2.1 = 720$

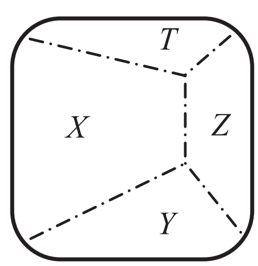
3. $C_{10}^2 = \dfrac{10.9}{2} = 45$; **4.** $C_4^2 = \dfrac{4.3}{2} = 6$ и от $P_n = 6$ следва, че $n = 3$; **5.** $C_{10}^3 = \dfrac{10.9.8}{1.2.3} = 120$

10. Основни комбинаторни понятия. Тема за самоконтрол

6. Броят на възможните избори на момче от $8^а$ клас и момиче от $8^б$ клас е 15.13 = 195. Изборът на момиче от $8^а$ клас и момче от $8^б$ клас може да стане по 10.14 = 140 начина. Следователно търсеният брой възможни двойки е 195 + 140 = 335.

7. Председател може да бъде всеки от тези 8 души. Останалите двама членове могат да се изберат по $C_7^2 = \dfrac{7.6}{1.2} = 21$ начина. Броят на различните комисии е 8.21 = 168.

8. За избор на цвета на държавата X има 4 възможности. Тогава за държавата Z има 3 възможности. За останалите две държави остават 2 възможни цвята. Следователно всички възможни оцветявания са 4.3.2.2 = 48.



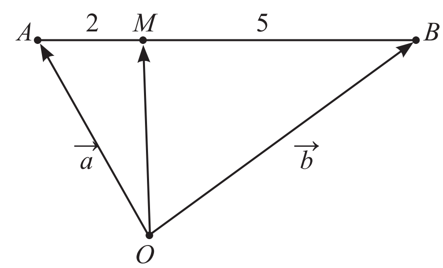
3. ВЕКТОРИ

12. Събиране и изваждане на вектори. Свойства

2. а) Ако $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, то $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\uparrow\uparrow\vec{a}$, т. е. твърдението е вярно;

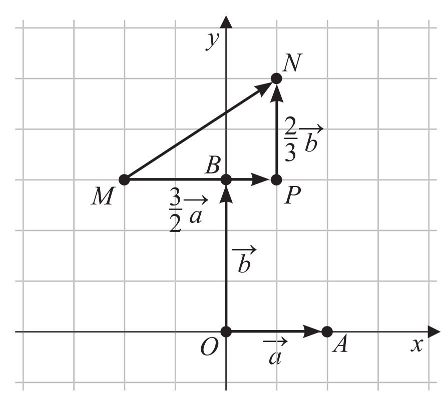
б) Ако $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, то не следва, че $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\uparrow\uparrow\vec{b}$, т. е. твърдението не е вярно.

14. Умножение на вектор с число. Свойства



1. $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\frac{2}{7}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=\vec{a}+\frac{2}{7}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=$

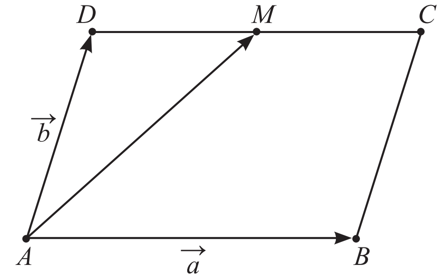
$=\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}-\frac{2}{7}\vec{a}=\frac{5}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}$



2. Построяваме векторите

$\overrightarrow{MP}=\frac{3}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{PN}=\frac{2}{3}\vec{b}$ и $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}$.

Тогава $\overrightarrow{MN}=\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$ и $N(1;\,5)$.



3. От $\overrightarrow{AM}=2\left(\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}\right)-3\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{7}{9}\vec{b}\right)=$

$=2\vec{a}-\frac{4}{3}\vec{b}-\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{7}{3}\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$ и $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\vec{b}+\overrightarrow{DM}$

следва, че $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ и M е средата на CD.

15. Умножение на вектор с число. Упражнение

1. Б) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MB}$.

2. От условието имаме, че $\overrightarrow{BC}=\vec{b}-\vec{a}$. Тогава $\overrightarrow{AC}-\underbrace{\overrightarrow{AB}}_{4\vec{a}}=\vec{b}-\vec{a}\Rightarrow\overrightarrow{AC}=\vec{b}+3\vec{a}$.

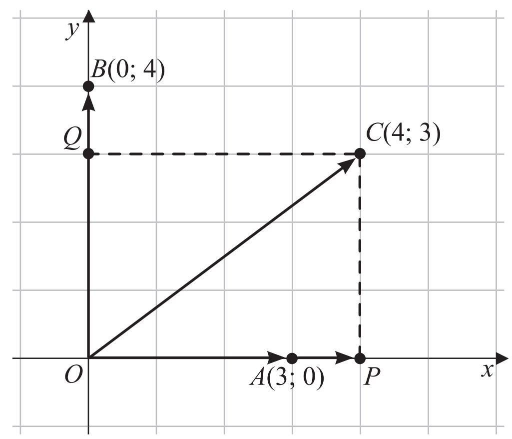
Но $\overrightarrow{CD}=\underbrace{\overrightarrow{AD}}_{4\vec{b}}-\underbrace{\overrightarrow{AC}}_{\vec{b}+3\vec{a}}=3\left(\underbrace{\vec{b}-\vec{a}}_{\overrightarrow{BC}}\right)=3\overrightarrow{BC}$. Следователно B, C и D лежат на една права.

16. Вектори. Тема за самоконтрол

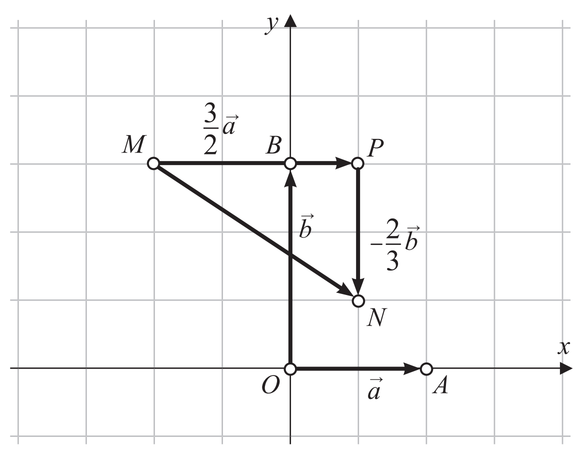
6. Означаваме с P и Q петите на перпендикулярите, спуснати от C съответно към Ox и Oy. От правилото на успоредника за сбор на вектори следва, че $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$.

Но $\overrightarrow{OP}=\frac{4}{3}\overrightarrow{OA}$ $\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$ и

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$



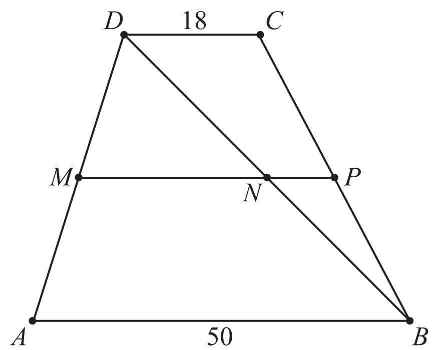
7. Построяваме векторите $\overrightarrow{MP}=\frac{3}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{PN}=-\frac{2}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}$ и определяме координатите на точката $N(1;\,1)$.



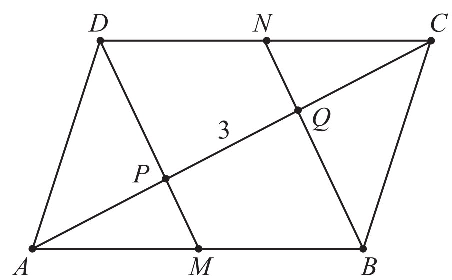
8. Виж решението на задача 3 след урок 14.

4. ТРИЪГЪЛНИК И ТРАПЕЦ

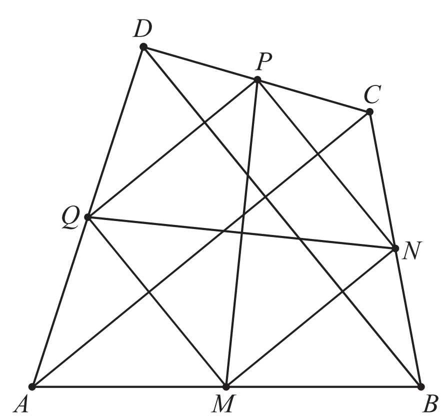
19. Средна отсечка в триъгълник. Упражнение



3. В ΔABD M е средата на AD и от $MN \parallel AB$ следва, че N е средата на BD и $MN = \frac{1}{2}AB = 25$. Но в ΔBCD $NP \parallel CD$ $(NP \parallel AB$ и $AB \parallel CD)$, а N е средата на BD. Тогава P е средата на BC и $NP = \frac{1}{2}CD = 9$.



4. От $DN = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB = MB$ и $DN \parallel MB$ следва, че $MBND$ е успоредник и $BN \parallel DM$. В ΔABQ M е средата на AB и $MP \parallel BQ$. Тогава P е средата на AQ и $AP = PQ = 3$ cm.
Аналогично се доказва, че Q е средата на PC и $CQ = PQ = 3$cm.
Следователно $AC = 9$ cm.



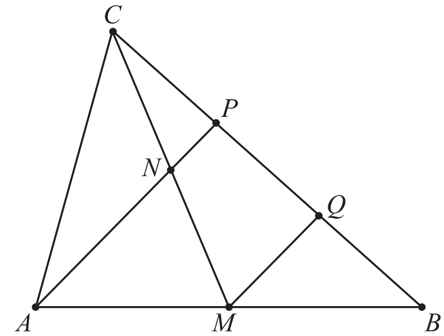
5. а) $AC = BD \Leftrightarrow MNPQ$ е ромб $\Leftrightarrow MP \perp NQ$;

б) $AC \perp BD \Leftrightarrow MNPQ$ е правоъгълник $\Leftrightarrow MP = NQ$.

6. Постройте $MQ \parallel AP$, $Q \in BP$ и използвайте, че MQ и NP са средни отсечки съответно в ΔABP и ΔABP.

$CP : PB = 1 : 2$, $AN : NP = 3 : 1$.

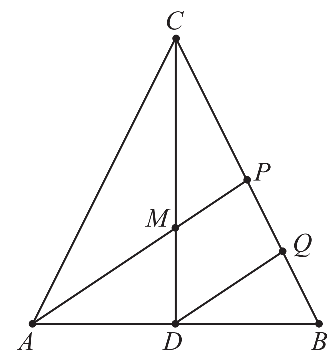
7. Г); **8.** В); **9.** А); **10.** Б).



20. Медицентър на триъгълник

1. Нека $AC \cap BD = O$. В успоредника $ABCD$ $BO = OD$ и $AO = OC$. Медицентровете M и N лежат на медианите AO и BO в ΔABD и ΔABC. От $AM = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}AC = \frac{1}{3}AC$ следва, че $AC = 3AM = 1$. Аналогично доказваме, че $BD = 3BN = 9$.

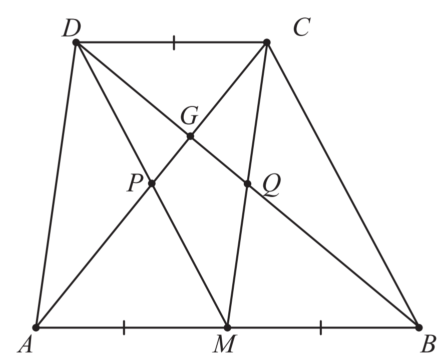
2. Точката M е медицентър на ΔABC (CD е височина и медиана, $M \in CD$ и $CM : MD = 2 : 1$), AP е медианата към страната BC и $CP = BP$. В ΔABP DQ е средна отсечка ($AD = BD$ и $DQ \| AP$) и $PQ = QB = 2$ cm. Тогава $PB = 4$ cm и $AC = BC = 8$ cm.



3. Нека $AC \cap MD = P, BD \cap MC = Q$.

От $AM = MB = \frac{AB}{2} = CD$ и $AB \| CD$ следва, че четириъгълниците $AMCD$ и $MBCD$ са успоредници.

Тогава $DP = PM$, $CQ = QM$, CP и DQ са медиани в ΔCMD, а G е негов медицентър.



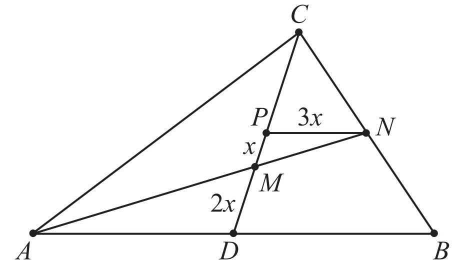
21. Медицентър на триъгълник. Упражнение

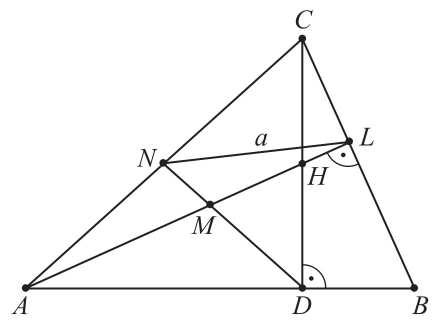
1. *Упътване*: Докажете, че $GN = 3$ cm, $GN = 5$ cm и $MN = 7$ cm; $AB = 14$ cm.

5. От $CM = \frac{2}{3}CD \Leftrightarrow CM : MD = 2 : 1$ и $M \in CD$ следва, че M е медицентър на ΔABC. Тогава AN е медиана, а P е средата на CD, тъй като NP е средна отсечка в ΔBCD (N е средата на BC и $NP \| BD$). Ако $CD = 6x$,

то $CP = PD = 3x$, $CM = \frac{2}{3}CD = 4x$, $MD = 2x$ и $PM = x$.

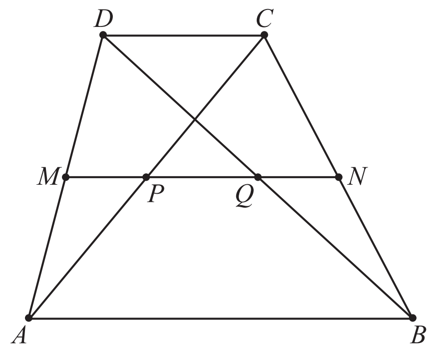
Следователно $CP : PM : MD = 3x : x : 2x = 3 : 1 : 2$.





6. *Упътване*: Докажете, че $LN = DN$ и използвайте, че M е медицентърът на $\triangle ADC$.

24. Средна отсечка (основа) на трапец



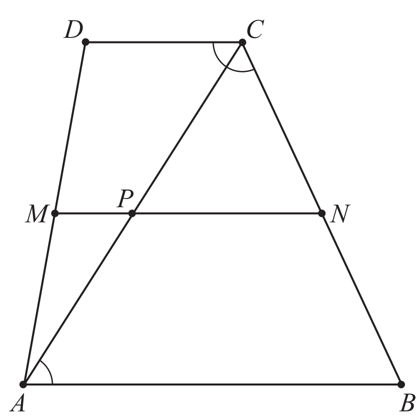
1. Нека $AB = a$, $BC = b$, $MP = 4x$, $PQ = 3x$.

От $MP = QN = \dfrac{b}{2}$ (MP и NQ са средни отсечки в ΔACD и ΔBCD) и $MP + PQ + QN = MN$

намираме $4x + 3x + 4x = 33$, $11x = 33$ и $x = 3$.

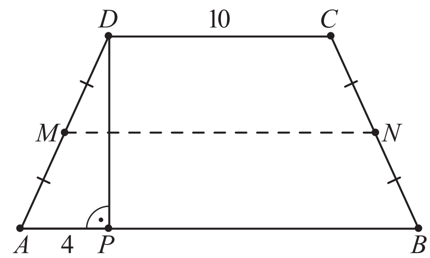
Тогава $MP = 12$ cm и $b = 24$ cm.

От $MN = \dfrac{a+b}{2} \Leftrightarrow 33 = \dfrac{a+24}{2}$ намираме $a = 42$ cm.



2. От $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD$ (AC е ъглополовяща на $\sphericalangle BCD$) и $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BAC$ (кръстни ъгли) следва, че $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BAC$, ΔACD е равнобедрен с бедра $AB = BC = 20$ cm. Точката P е средата на диагонала AC. Тогава в ΔABC и ΔACD PN и MP са средни отсечки и $PN = \dfrac{1}{2} AB = 10$ cm, $MP = \dfrac{2}{5} PN = 4$ cm и $CD = 2MP = 8$ cm. Основите на трапеца са $AB = 20$ cm и $CD = 8$ cm.

25. Средна отсечка на трапец. Упражнение



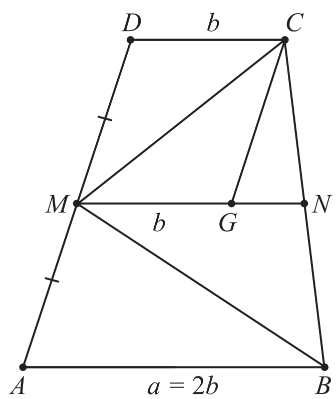
1. Нека $AB = a,\ CD = b$ са основите на равнобедрения трапец $ABCD$. Тогава средната основа има дължина $MN = \dfrac{a+b}{2}$.

Знаем, че ако $DP \perp AB\ (P \in AB)$, то $AP = \dfrac{a-b}{2}$.

От $b = CD = 10$ и $AP = 4$ намираме:

$\dfrac{a-b}{2} = 4 \Leftrightarrow a = b + 8 \Leftrightarrow a = 18$.

Следователно $MN = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{18+10}{2} = 14$.



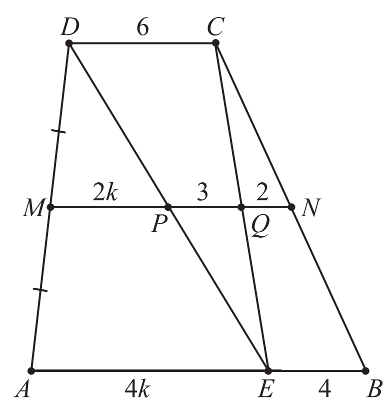
2. Нека $AB = a,\ CD = b$ са основите, а M и N – средите на бедрата на трапеца $ABCD$.
Тогава MN е средна основа на трапеца и $MN \parallel CD$,

$MN = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{3b}{2}$ (по условие $a = 2b$).

Ако G е медицентърът на ΔBCM то $G \in MN$ и

$MG = \dfrac{2}{3}MN = \dfrac{2}{3}.\dfrac{3b}{2} = b$.

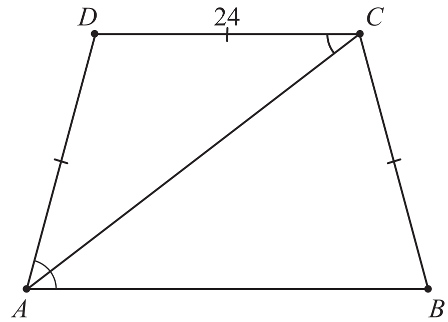
В четириъгълника $MGCD$ $MG \parallel CD$ и $MG = CD = b$.
Следователно $MGCD$ е успоредник и $CG \parallel MD$, т.е. $CG \parallel AD$.



3. В трапеца $ABCD$ MN е средна основа и $MN \parallel AB$.
По условие точката E дели вътрешно основата AB в отношение k, т.е. $\dfrac{AE}{BE} = k \Leftrightarrow AE = k.BE \Leftrightarrow AE = 4k$.
От това, че M и N са среди на AD и BC и $MN \parallel AB$, следва, че MP, PQ и QN са средни отсечки съответно в триъгълниците AED, CDE и BEC.

Тогава $MP = \dfrac{1}{2}AE = 2k$, $PQ = \dfrac{1}{2}CD = 3$, $NQ = \dfrac{1}{2}BE = 2$
и от $MN = MP + PQ + QN = 20$ получаваме,
че $k = 7{,}5$. За отсечките MP и AB намираме:

$MP = 2.7{,}5 = 15$; $AB = AE + BE = 4.7{,}5 + 4 = 34$.



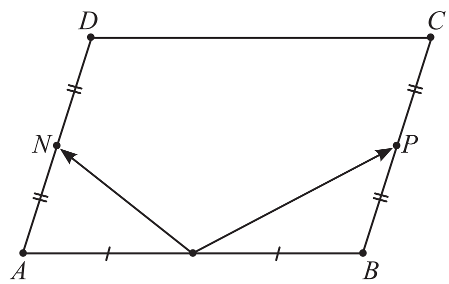
6. Нека в равнобедрения трапец $ABCD$ $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD$.

Но $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD$ (кръстни ъгли при $AB \parallel CD$).

Тогава $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACD$, от което следва, че ΔACD е равнобедрен и $AD = CD = 24$.

От $P_{ABCD} = AB + CD + 2AD = AB + 3CD$ намираме $AB = 108 - 3.24 = 108 - 72 = 36$.

Следователно $AB = 36$ cm.



7. Нека M, N и P са средите на страните AB, AD и BC на успоредника $ABCD$.

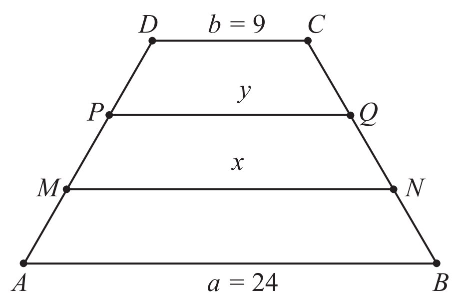
Тогава $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ и

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Аналогично, за $\overrightarrow{MP}$ намираме:

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Следователно $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.



8. От $AM = MP = PD$ и $PQ \parallel MN \parallel AB$ следва, че четириъгълниците $ABQP$ и $MNCD$ са трапеци със средни основи MN и PQ.

Да означим $MN = x$, $PQ = y$ и от $MN = \frac{AB + PQ}{2}$,

$PQ = \frac{MN + CD}{2}$ намираме $x = \frac{a + y}{2}$ и $y = \frac{x + b}{2}$.

Тогава $2x = a + y \Leftrightarrow 2x = a + \frac{x + b}{2} \Leftrightarrow 4x = 2a + x + b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x = 2a + b \Leftrightarrow x = \frac{2a + b}{3}$, т.е. $MN = \frac{2.24 + 9}{3} = 19$.

От $y = \frac{x + b}{2} = \frac{19 + 9}{2} = 14$ намираме, че $PQ = 14$.

5. КВАДРАТЕН КОРЕН

37. Квадратен корен. Тема за самоконтрол

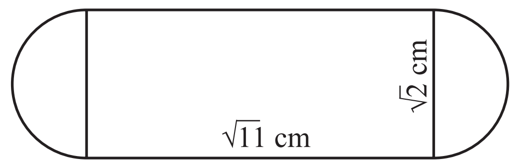
6. Измеренията на паралелепипеда са $a=\sqrt{5}+1,\ b=\sqrt{5}-1,\ c=\sqrt{15}$ и повърхнината му е $S=2(ab+ac+bc)=2\left[\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)+\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{15}+\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{15}\right]=$

$$=2\left[\left(\sqrt{5}\right)^2-1^2+\sqrt{75}+\cancel{\sqrt{15}}+\sqrt{75}-\cancel{\sqrt{15}}\right]=2\left(4+2\sqrt{75}\right)=8+20\sqrt{3}.$$

7. $$\frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{15}}+\frac{1}{\sqrt{15}-\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{24}-\sqrt{15}}{\left(\sqrt{24}+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{24}-\sqrt{15}\right)}+\frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{\left(\sqrt{15}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{15}+\sqrt{6}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{24}-\sqrt{15}}{24-15}+\frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{15-6}=\frac{\sqrt{24}-\cancel{\sqrt{15}}+\cancel{\sqrt{15}}+\sqrt{6}}{9}=\frac{2\sqrt{6}+\sqrt{6}}{9}=\frac{3\sqrt{6}}{9}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

8. Лицето на фигурата е сбор от лицата на правоъгълник с размери $\sqrt{11}$ cm и $\sqrt{2}$ cm и два еднакви полукръга с диаметър $\sqrt{2}$ cm.



Площта на правоъгълника е $S=\sqrt{11}.\sqrt{2}=\sqrt{22}$ cm^2, а сборът на лицата на двата полукръга е лицето B на кръг с радиус

$r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $B=\pi r^2=\pi\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{\pi}{2}$ cm^2.

Лицето на дадената фигура е $S_{\text{фиг.}}=\sqrt{22}+\dfrac{\pi}{2}$, а на квадрат със страна $\sqrt{5}$ cm е $S_{\text{кв.}}=5$ cm^2.

Като вземем предвид, че $\sqrt{22}>4$ и $\dfrac{\pi}{2}>\dfrac{3}{2}$, то $\sqrt{22}+\dfrac{\pi}{2}>4+\dfrac{3}{2}>5$ и $S_{\text{фиг.}}>S_{\text{кв.}}$.

6. КВАДРАТНИ УРАВНЕНИЯ

40. Формула за корените на квадратното уравнение. Упражнение

4. а) $(5x-3)^2-(2x)^2=0 \Leftrightarrow (7x-3)(3x-3)=0 \Leftrightarrow x_1=\dfrac{3}{7},\ x_2=1;$

б) $(6x-5)^2-(4x+1)^2=0 \Leftrightarrow (10x-4)(2x-6)=0 \Leftrightarrow x_1=\dfrac{2}{5},\ x_2=3;$

в) $x^2+\left(1-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x-\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow x_1=-1,\ x_2=\sqrt{2};$

г) $x^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{6}=0 \Leftrightarrow \left(x+\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow x_1=-\sqrt{2},\ x_2=-\sqrt{3}.$

44. Приложения на формулите на Виет

2. а) $x_1x_2=-\dfrac{1}{2}$ и $x_1x_2<0 \Leftrightarrow x_1<0<x_2$; б) $x_1x_2=-\dfrac{1}{2}$ и $x_1x_2<0 \Leftrightarrow x_1<0<x_2$;

в) $D=41,\ x_1x_2=\dfrac{1}{2},\ x_1+x_2=-\dfrac{7}{2}$ и $\left|\begin{array}{l}D>0\\ x_1x_2>0\\ x_1+x_2<0\end{array}\right. \Leftrightarrow x_1<x_2<0;$

г) $D=41,\ x_1x_2=\dfrac{1}{2},\ x_1+x_2=\dfrac{7}{2}$ и $\left|\begin{array}{l}D>0\\ x_1x_2>0\\ x_1+x_2>0\end{array}\right. \Leftrightarrow x_1>x_2>0.$

45. Разлагане на квадратния тричлен на множители

3. а) $x^2-3x-4=(x+1)(x-4)$; б) $-x^2+x+2=-(x+1)(x-2)=(x+1)(2-x)$;

в) $x^2+2\sqrt{2}x+2=\left(x+\sqrt{2}\right)^2$; г) $2x^2-4x+6=2\left(x^2-2x+3\right)$.

4. а) $\dfrac{x^2-3x-4}{2x^2+x-1}=\dfrac{(x+1)(x-4)}{(x+1)(2x-1)}=\dfrac{x-4}{2x-1}$; б) $\dfrac{2x^2-x-1}{4x^2+4x+1}=\dfrac{(x-1)(2x+1)}{(2x+1)^2}=\dfrac{x-1}{2x+1}$;

в) $\dfrac{3x^2-8x+4}{3x^2-2x}=\dfrac{(3x-2)(x-2)}{x(3x-2)}=\dfrac{x-2}{x}$; г) $\dfrac{x^3-8}{2x^2-6x+4}=\dfrac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{2(x-1)(x-2)}=\dfrac{x^2+2x+4}{2(x-1)}$.

46. Решаване на уравнения от по-висока степен чрез разлагане на множители

1. а) $x^3-3x^2+2x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-3x+2\right)=0 \Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2$;

б) $8x^3=27 \Leftrightarrow (2x)^3-3^3=0 \Leftrightarrow (2x-3)\left(4x^2+6x+9\right)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$;

в) $(x-1)^3=(x-1)^2 \Leftrightarrow (x-1)^3-(x-1)^2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2)=0 \Leftrightarrow x=1,\ x=2$;

г) $(x-1)^3=x-1 \Leftrightarrow (x-1)^3-(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-2x-2\right)=0 \Leftrightarrow x_1=1,\ x_{2,3}=1\pm\sqrt{3}$;

д) $(x-1)(x-2)x=(x-1)(x-3) \Leftrightarrow (x-1)(x-2)x-(x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-3x+3\right)=0 \Leftrightarrow x=1$.

4. а) $x^3-x^2+x-1=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+1\right)=0$;

б) $2x^3-2=x^2-x \Leftrightarrow 2(x-1)\left(x^2+x+1\right)-x(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+2\right)=0$;

в) $x^4-x^3-x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)x^3-(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^3-1\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(x^2+x+1\right)=0$.

5. а) $x^3+3x^2-x-3=0 \Leftrightarrow (x+3)\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow x_1=-3,\ x_{2,3}=\pm1$;

б) $x^4+x^3-x-1=0 \Leftrightarrow (x+1)x^3-(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^3-1\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)\left(x^2+x+1\right)=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm1$.

6. а) $\left(x^2-x\right)^2=x^3+5x^2 \Leftrightarrow x^2(x-1)^2-x^2(x+5)=0 \Leftrightarrow x^2\left(x^2-3x-4\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0,\ x=-1,\ x=4$;

б) $\left(4x^2-1\right)^2=4x^2+4x+1 \Leftrightarrow (2x+1)^2(2x-1)^2-(2x+1)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x+1)^2(2x-2).2x=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=1,\ x=-\dfrac{1}{2}$.

47. Решаване на уравнения от по-висока степен чрез разлагане на множители. Упражнение

1. а) $\left(x^2-x-1\right)^2-(x-2)^2=0 \Leftrightarrow \left(x^2-3\right)\left(x^2-2x+1\right)=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3},\ x=1$;

б) $(2x-1)^3-(2x-1)x=0 \Leftrightarrow (2x-1)\left(4x^2-5x+1\right)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2},\ x=1,\ x=\dfrac{1}{4}$.

2. а) $\left(x^2+3\right)\left(x^2-3\right)-\left(x^2-3\right)x=0 \Leftrightarrow \left(x^2-3\right)\left(x^2-x+3\right)=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$;

б) $\left(x^2+3\right)\left(x^2-3\right)+x\left(x^2+3\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2+3\right)\left(x^2+x-3\right)=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

3. а) $(x+1)\left(x^2+x-5\right)=0 \Leftrightarrow x_1=-1,\ x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$;

б) $(x+1)\left(x^2-4x-1\right)=0 \Leftrightarrow x_1=-1,\ x_{2,3}=2\pm\sqrt{5}$.

4. $d=4$ и $x^3-5x^2+4x+4=0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2-3x-2\right)=0 \Leftrightarrow x_1=2,\ x_{2,3}=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$.

49. Решаване на уравнения от по-висока степен с въвеждане на помощно неизвестно. Упражнение

3. а) $\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^2-3x+2}=\dfrac{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}{(x-2)(x-1)}=(x+2)(x+1)=x^2+3x+2$;

б) $\dfrac{x^4-4x^2+3}{(x+1)\left(x^2+x-2\right)}=\dfrac{(x+1)(x-1)\left(x^2-3\right)}{(x+1)(x+2)(x-1)}=\dfrac{x^2-3}{x+2}$

50. Моделиране с квадратни уравнения

3. Нека a и b са основите на трапеца, а h – височината му. Дължината на средната основа е $\dfrac{a+b}{2}$, а от $S=\dfrac{a+b}{2}.h$ и $\dfrac{a+b}{2}=h-2$ получаваме уравнението $h(h-2)=80$ с положителен корен $h=10$.

52. Квадратни уравнения. Тема за самоконтрол

6. *I начин.* От формулите на Виет за корените x_1 и x_2 на уравнението $x^2+3x-14=0$ намираме $x_1+x_2=-3$ и $x_1x_2=-14$.

Нека търсеното уравнение е $y^2+py+q=0$, където $y_1+y_2=3x_1+3x_2=3\left(x_1+x_2\right)=$
$=-9=-p \Leftrightarrow p=9$ и $y_1y_2=3x_1.3x_2=9x_1x_2=-126=q$. Следователно $y^2+9y-126=0$.

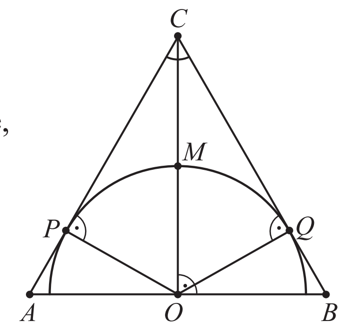
II начин. От $y=3x$ определяме $x=\dfrac{y}{3}$ и го заместваме в уравнението
$x^2+3x-14=0$: $\dfrac{y^2}{9}+3.\dfrac{y}{3}-14=0 \Leftrightarrow y^2+9y-126=0$.

7. $(2x-1)^2(x-1)=x^2-1 \Leftrightarrow (2x-1)^2(x-1)-(x+1)(x-1)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left[(2x-1)^2-(x+1)\right](x-1)=0 \Leftrightarrow \left(4x^2-5x\right)(x-1)=0 \Leftrightarrow x(4x-5)(x-1)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=\dfrac{5}{4},\ x_3=1$. Следователно $x_1+x_2+x_3=0+\dfrac{5}{4}+1=\dfrac{9}{4}$.

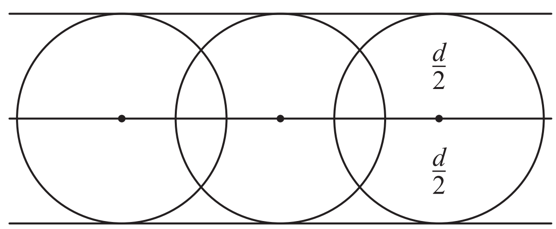
8. Полагаме $u=x^2+2x$ и получаваме уравнението $u^2-2u-3=0$ с корени $u_1=-1$ и $u_2=3$. От $x^2+2x=-1 \Leftrightarrow x^2+2x+1=0$ намираме $x=-1$, а от $x^2+2x=3 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0$ получаваме $x=1$ и $x=-3$. Следователно уравнението има три решения: $x=\pm1$ и $x=-3$.

54. Взаимни положения на точка и права с окръжност. Упражнение

2. Нека в равностранния ΔABC M е средата на височината CO $\left(O \in AB\right)$, а OP и OQ $\left(P \in AC, Q \in BC\right)$ са разстоянията от O до AC и BC. Докажете, че в правоъгълните триъгълници POC и QOC $PO = QO = \frac{1}{2}CO = MO$.

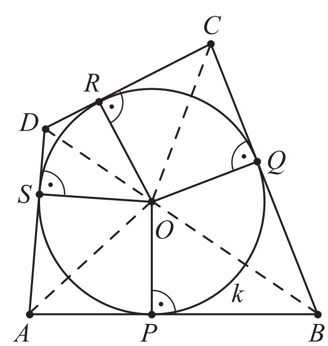


5. Ако d разстоянието между двете прави, то ГМТ е права, успоредна на тези прави и на рзстояние $\frac{d}{2}$ до всяка от тях.

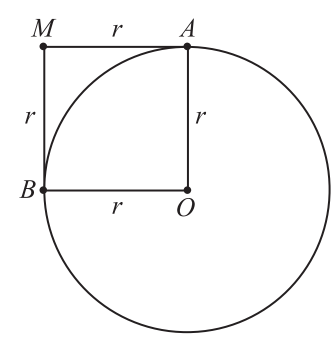


55. Допирателни към окръжност през външна точка

1. От $AP = AS$ (допирателни отсечки) следва, че $OP = OS$ и AO е ъглополовяща на $\sphericalangle A$.
Аналогично се доказва, че $OP = OQ$, $OQ = OR$, $OR = OS$ и BO, CO, DO са ъглополовящи на $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ и $\sphericalangle D$.

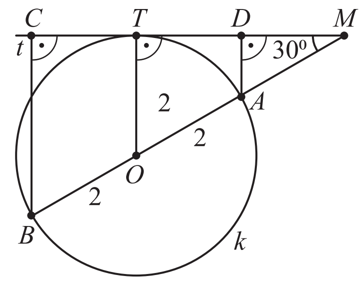


2. Докажете, че четириъгълникът $MAOB$ е квадрат.
Тогава $MA = MB = r = 2\,\text{cm}$.

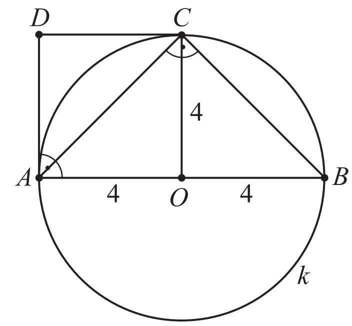


3. Докажете, че четириъгълникът $MAOB$ е квадрат.
Тогава $\sphericalangle AMB = 90°$.

4. Нека $AD \perp t$ и $BC \perp t$ са разстоянията от A и B до правата t. В правоъгълните триъгълници MOT, MAD и MBC с $\sphericalangle M = 30^\circ$ следва, че $OM = 2OT = 4$, $AM = MO - AO = 2$, $MB = AB + AM = 6$, $AD = \dfrac{AM}{2} = 1$ cm и $BC = \dfrac{BM}{2} = 3$ cm.



5. Ъглополовящата на дадения ъгъл (вж. зад. 4б) след урок 52).



6. Ако O е центърът на k, докажете, че O е средата на AB, $AOCD$ е квадрат, $ABCD$ е правоъгълен трапец с лице $S = \dfrac{AB+CD}{2}.AD = \dfrac{8+4}{2}.4 = 24$ cm^2.

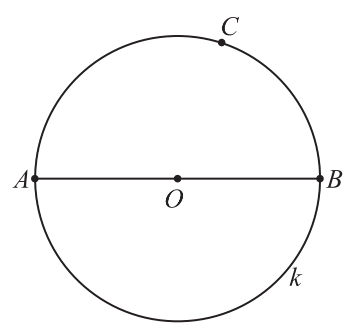
56. Централни ъгли, дъги и хорди

3. Ако AB е хорда в окръжност $k(O;\, r)$ и $\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$, докажете, че ΔABC е равностранен (вж. основната задача от урока).

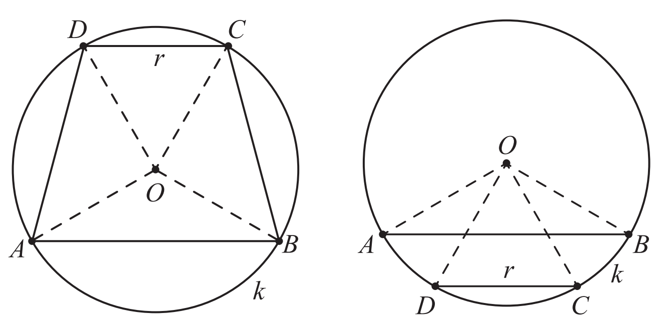
4. От $\overset{\frown}{AB} = 180^\circ$ следва, че AB е диаметър на k и $AB = 2r = 4$ cm. От $\overset{\frown}{BC} = 60^\circ$ и задача 3 намираме $BC = r = 2$ cm.

57. Централни ъгли, дъги и хорди. Упражнение

1. От $\overset{\frown}{ABC} + \overset{\frown}{CA} = 360^\circ$ и $\overset{\frown}{ABC} = 252^\circ$ намираме $\overset{\frown}{AC} = 108^\circ$ и $\overset{\frown}{BC} = \dfrac{2}{3}\overset{\frown}{AC} = 72^\circ$. Тогава $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{ABC} - \overset{\frown}{BC} = 180^\circ$, от което следва, че AB е диаметър на k.

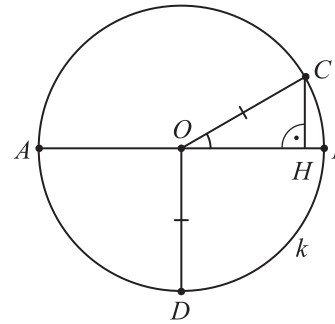


2. $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 75^\circ$, $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 105^\circ$ или $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 45^\circ$, $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 135^\circ$.



3. Използвайте, че в правоъгълния ΔHOC $CH = \frac{1}{2}OC$, $\sphericalangle HOC = 30°$ и $\overset{\frown}{CB} = 30°$.

Тогава $\overset{\frown}{AC} : \overset{\frown}{CB} : \overset{\frown}{BD} : \overset{\frown}{DA} = 150° : 30° : 90° : 90° = 5:1:3:3$



4. Използвайте, че в успоредника $ABCD$ от $AB = CD$ и $AD = BC$ следва, че $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ и $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$ (вж. задача 4 от урока).

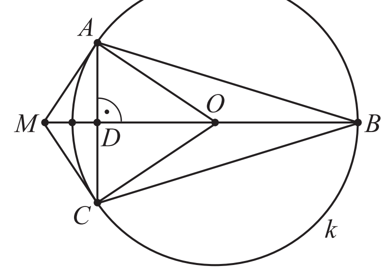
58. Диаметър, перпендикулярен на хорда

5. От $MA = MB$ (допирателни на k) и $AO = CO = r$ следва, че правата MO е симетрала на AC и $MO \perp AC$.

а) От $BD \perp AC$ следва, че $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD}$ и $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CB}$ (BD е диаметър, перпендикулярен на хордата AC).

б) От $\overset{\frown}{AD} = 30° = \overset{\frown}{CD}$ следва, че $\overset{\frown}{ADC} = 60°$, $\sphericalangle AOC = 60°$, ΔAOC е равностранен и

$AC = r = 2$. Като вземем предвид, че $BD \perp AC$, намираме
$S_{ABCD} = \frac{AC.BD}{2} = \frac{2.4}{2} = 4$.

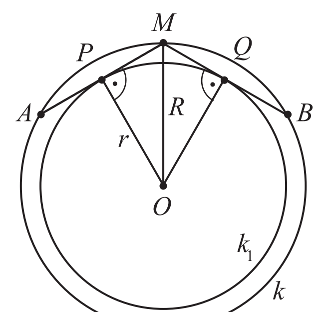


59. Диаметър, перпендикулярен на хорда. Упражнение

1. Използвайте, че от $AB \parallel CD$ и задача 1 от урока следва, че $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$. Тогава $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BD}$ и $AC = BD$.

2. От следствието на задача 1 от урока следва, че $ABCD$ е равнобедрен трапец. Тогава $AD = BC$, $AC = BD$ и $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC$. От $AD = BC$ следва, че разстоянията от O до тези хорди са равни.

Забележка: Задачата може да решите и с разсъждения, подобни на тези при решаването на задача 1 от урока.



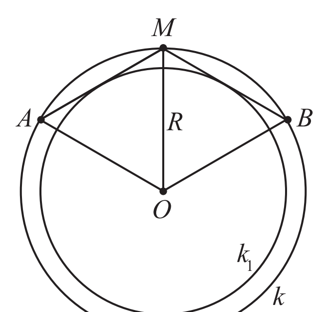
3. *I начин.* Ако P и Q са допирните точки на MA и MB с k_1, от $OP \perp MA$, $OQ \perp MB$ и $OP = OQ = r$ следва, че $MA = MB$, а P и Q са средите на хордите MA и MB на k.

В правоъгълния ΔMOP $\sphericalangle PMO = 60°$ (MO е ъглополовяща на $\sphericalangle AMQ = 120°$) и $PM = \frac{MO}{2} = \frac{R}{2} = 3$.

Следователно $AM = MB = 6$ cm.

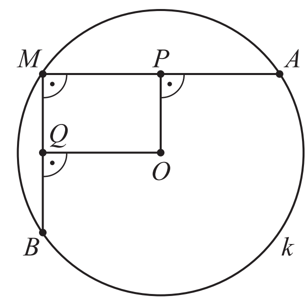
II начин. От $AO = MO = BO = R$ следва, че AOM и BOM са равнобедрени триъгълниците. Но $\sphericalangle AMO = \sphericalangle BMO = 60°$, тъй като MO е ъглополовяща на $\sphericalangle AMB = 120°$ между допирателните MA и MB.

Тогава AOM и BOM са равностранни триъгълници и $AM = MB = R = 6$cm.



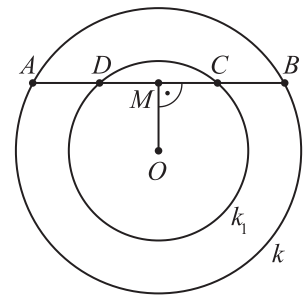
4. Ако OP и OQ са разстоянията от O до хордите MA и MB, то P и Q са средите на хордите, а $MPOQ$ е правоъгълник.

а) $OP = 1\text{cm}$, $OQ = 2\text{ cm}$; б) $MA = 4\text{ cm}$, $MB = 6\text{cm}$.



5. Ако $OM \perp AB$ $(M \in AB)$, използвайте, че M е средата на хордата AB на k и на хордата CD на k_1.

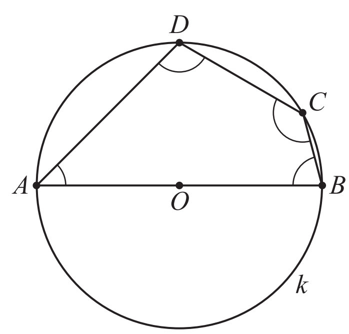
Забележка: Не е необходимо построяването на самия диаметър, а само на перпендикуляра OM от центъра O към хордата AB.



60. Вписан ъгъл

5. От $AB = r$ следва, че $\overset{\frown}{AMB} = 60°$ и $\overset{\frown}{ANB} = 300°$.

Тогава $\sphericalangle AMB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ANB} = 150°$ и $\sphericalangle ANB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AMB} = 30°$.



6. От $CD = 0,5AB$ следва, че $\overset{\frown}{CD} = 60°$, $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC} = 120°$,

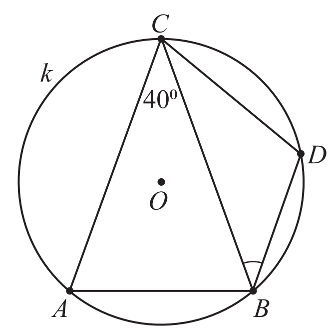
$\overset{\frown}{AD} = 90°$ и $\overset{\frown}{BC} = 30°$. $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD} = 45°$,

$\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ADC} = 75°$, $\sphericalangle BCD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD} = 135°$ и

$\sphericalangle ADC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ABC} = 105°$.

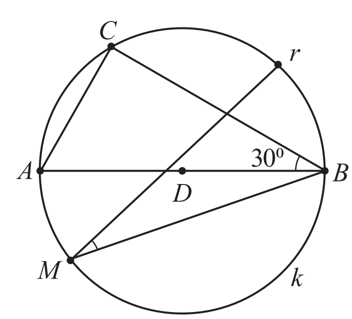
61. Вписан ъгъл. Упражнение

1. Вижте решението на задача 4 от урока.

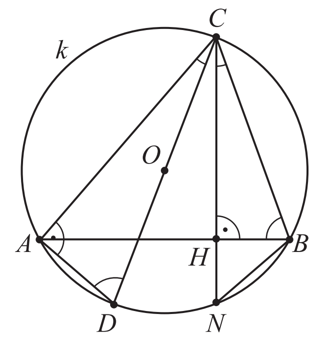


2. Докажете, че $\overset{\frown}{BD} = 60°$ и $\sphericalangle CBD = 40°$.

3. Вижте задача 5 от урока.



4. Докажете, че $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCN$, като сравните ъглите на ΔADC и ΔHCB. От $\sphericalangle ACD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$ и $\sphericalangle BCN = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BN}$ следва, че $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BN}$.

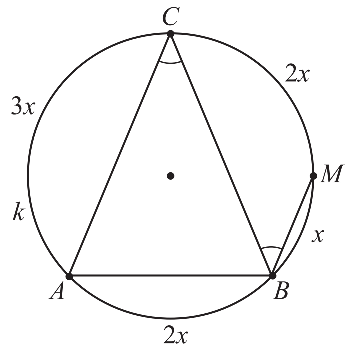


5. Означаваме $\overset{\frown}{BM} = x$, $\overset{\frown}{CM} = 2x$ и $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC} = 3x$, тъй като $AC = BC$.

От $BM \parallel AC$ следва, че $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CM} = 2x$. Тогава $8x = 360°$,

$x = 45°$, $\overset{\frown}{AB} = 90°$, $\overset{\frown}{AC} = 135°$ и $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = 45°$,

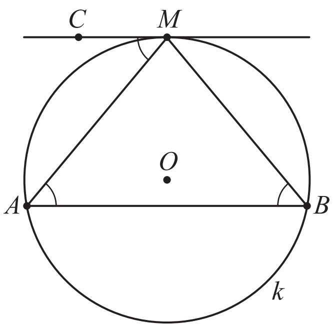
$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} = 67{,}5° = 67°30'$.



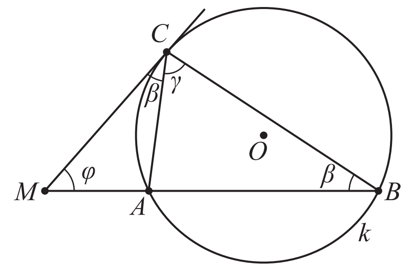
62. Периферен ъгъл

3. а) От $AB \parallel CM$ следва, че $\sphericalangle CMA = \sphericalangle MAC$ (кръстни ъгли).

Но $\sphericalangle CMA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AM}$ (периферен ъгъл), $\sphericalangle ABM = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AM}$ (вписан ъгъл). Тогава $\sphericalangle MAB = \sphericalangle ABM$ и ΔABM е равнобедрен.



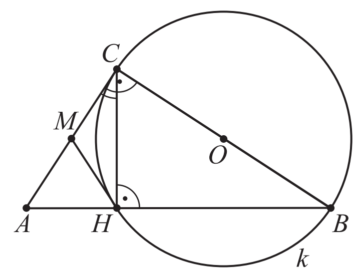
63. Периферен ъгъл. Упражнение



1. Означаваме $\sphericalangle ABC=\beta$, $\sphericalangle ACB=\gamma$ и $\sphericalangle BMC=\varphi$. Тогава $\sphericalangle MCA=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}=\sphericalangle ABC=\beta$ ($\sphericalangle MCA$ е периферен, а $\sphericalangle ABC$ е вписан), а $\gamma=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$. а) От $CM=CB$ и $\overset{\frown}{ACB}=150^\circ$ следва, че $\varphi=\beta$, $\overset{\frown}{AB}=210^\circ$ и $\gamma=105^\circ$. В ΔMBC $3\beta+\gamma=180^\circ$, $3\beta=75^\circ$ и $\beta=25^\circ$. Ъглите на ΔABC са $\sphericalangle B=25^\circ$, $\sphericalangle C=105^\circ$ и $\sphericalangle A=50^\circ$.

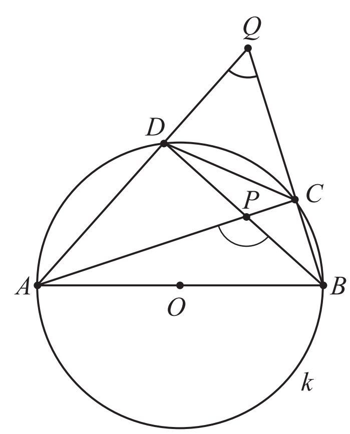
б) От $\sphericalangle BMC=2\sphericalangle MBC$ и $\overset{\frown}{ACB}=200^\circ$ следва, че $\varphi=2\beta$, $\overset{\frown}{AB}=160^\circ$ и $\gamma=80^\circ$, $4\beta+\gamma=180^\circ$, $4\beta=100^\circ$ и $\beta=25^\circ$. Ъглите на ΔABC са $\sphericalangle B=25^\circ$, $\sphericalangle C=80^\circ$ и $\sphericalangle A=75^\circ$.

2. $\sphericalangle A=40^\circ$, $\sphericalangle B=65^\circ$, $\sphericalangle C=75^\circ$ (вж. задача 3 от урока). **3.** Докажете, че $\Delta ACP\cong\Delta AHC$ и $\Delta BQC\cong\Delta BHC$ (вж. втория начин от решението на задача 4 от урока).



4. От $H\in k$ с диаметърът BC следва, че $\sphericalangle BHC=90^\circ$. Равенството $\sphericalangle MCH=\sphericalangle MHC$ следва от $\sphericalangle ACH=\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle MHC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{HC}=\sphericalangle HBC$ ($\sphericalangle MHC$ е периферен, а $\sphericalangle HBC$ е вписан). Може да използваме и факта, че AC е допирателна на k $\left(AC\perp BC\right)$ и $MH=MC$ като допирателни отсечки.

64. Ъгъл, чийто връх е вътрешна или външна точка за окръжност



5. От $CD=\frac{1}{2}AB=r$ следва, че $\overset{\frown}{CD}=60^\circ$ и $\overset{\frown}{AB}=180^\circ$.

Тогава $\sphericalangle APB=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}}{2}=\frac{180^\circ+60^\circ}{2}=120^\circ$ и

$\sphericalangle AQB=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CD}}{2}=\frac{180^\circ-60^\circ}{2}=60^\circ$.

65. Ъгъл, чийто връх е вътрешна или външна точка за окръжност. Упражнение

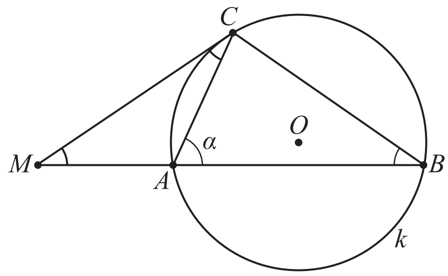
1. $\sphericalangle APB=110^\circ$ (вж. задача 1 от урока).

2. Използвайте, че $\overset{\frown}{CD}=60^\circ$ и докажете, че $\overset{\frown}{AB}=200^\circ$. Тогава $\sphericalangle APB=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}}{2}=130^\circ$ и $\sphericalangle BPC=50^\circ$ (вж. задача 2 от урока).

3. Ако $\sphericalangle BAC = \alpha$, то $\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AC} = \alpha$ и $\sphericalangle BMC = \dfrac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AC}}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$.

Тогава $\sphericalangle ACM = \dfrac{\alpha}{2}$ ($\sphericalangle BAC = \alpha$ е външен за ΔAMC) и

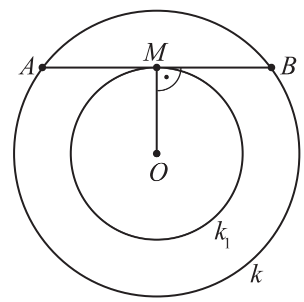
$\sphericalangle ABC = \dfrac{1}{2}\sphericalangle \overset{\frown}{AC} = \sphericalangle ACM = \dfrac{\alpha}{2}$ ($\sphericalangle BAC$ е вписан, а $\sphericalangle ACM$ е периферен). Следователно триъгълниците ACM и BCM са равнобедрени, $MA = AC$ и $MC = BC$.



4. Докажете, че $MB = BC$. Тогава $AM = AB + BM = AB + BC = P_{ABC} - AC = 40 - 18 = 22$ cm.

66. Взаимно положение на две окръжности

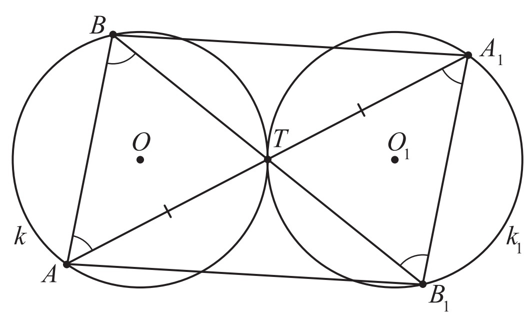
4. $OO_1 = \dfrac{2S_{AOBO_1}}{AB} = \dfrac{2.36}{4} = 18$ cm (вж. задача 2 от урока).



67. Взаимно положение на две окръжности. Упражнение

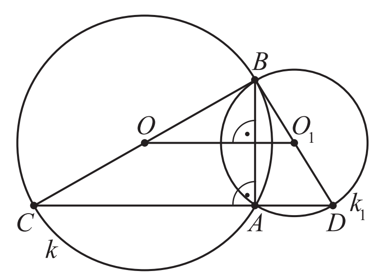
1. Ако O е центърът на двете окръжности, докажете, че $MO \perp AB$.

2. От задача 2 от урока следва, че $AB \parallel A_1B_1$. Тогава $\Delta ATB \cong \Delta A_1TB_1$ по II признак $\left(AT = A_1T,\ \sphericalangle A = \sphericalangle A_1,\ \sphericalangle B = \sphericalangle B_1\right)$, от което следва, че $BT = B_1T$. Тогава AB_1A_1B е успоредник, $AB = A_1B_1$ и $AB_1 = A_1B$.

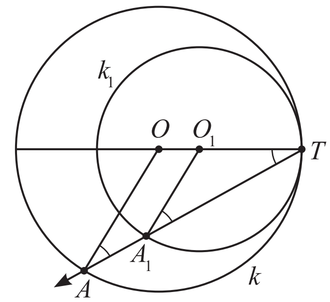


3. От $AB \perp OO_1$ и $CD \parallel OO_1$ следва, че $AB \perp CD$, BC и BD са диаметри, а OO_1 е средна отсечка в ΔBCD.

Тогава $BC = 2R = 8$ cm, $BD = 2r = 4$ cm и $CD = 2OO_1 = 10$ cm.

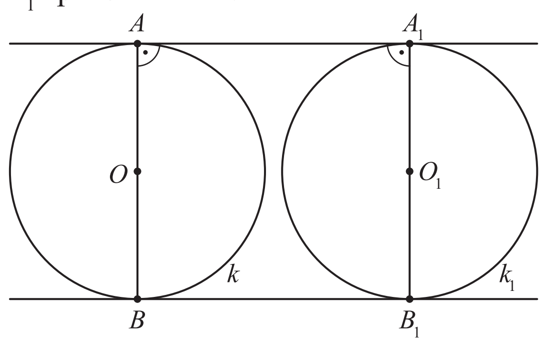


4. Използвайте, че в равнобедрените триъгълници AOT и A_1O_1T ъглите при основите AT и A_1T са равни.



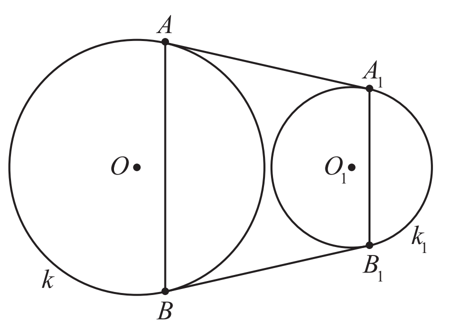
68. Общи допирателни на две окръжности

1. а) 2; б) 1; в) 4; г) 3. **2**. Ако AA_1 и BB_1 са общите външни допирателни на окръжностите $k(O; r)$ и $k_1(O_1; r)$, то AA_1BB_1 правоъгълник.

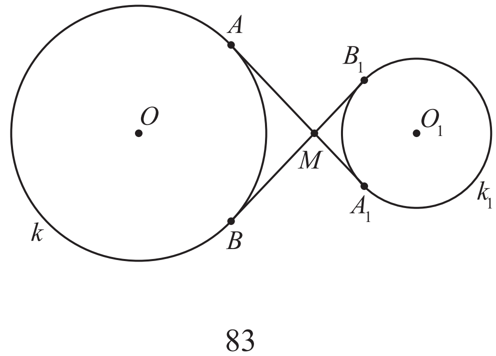


3. Вж. предходната задача 2. **4.** Ако AA_1 и BB_1 са външните допирателни на окръжностите k и k_1 $(A, B \in k, A_1, B_1 \in k_1)$, докажете, че $AB \parallel A_1B_1$.

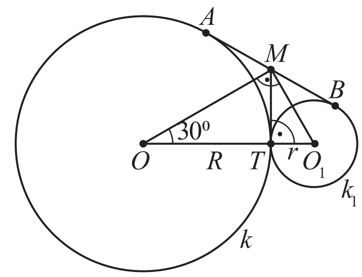
Например, от $\sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle ABB_1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ (периферни ъгли за k) и $\sphericalangle AA_1B_1 = \sphericalangle BB_1A_1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{A_1B_1}$ (периферни ъгли за k_1) следва, че $\sphericalangle BAA_1 + \sphericalangle AA_1B_1 = 180^\circ$ и $AB \parallel A_1B_1$. От $AA_1 = BB_1$ следва, че AA_1B_1B е равнобедрен трапец.



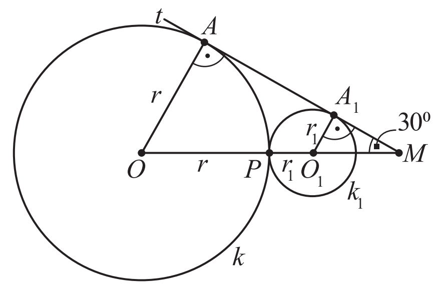
5. Ако AA_1 и BB_1 са вътрешните допирателни на окръжностите k и k_1 $(A, B \in k, A_1, B_1 \in k_1)$, а M е общата им точка, от $MA = MB$ (допирателни на k) и $MA_1 = MB_1$ (допирателни на k_1) следва, че $AA_1 = AM + MA_1 = BM + MB_1 = BB_1$.



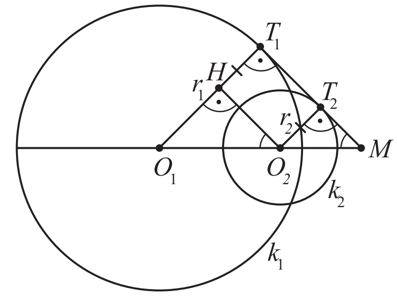
69. Общи допирателни на две окръжности. Упражнение



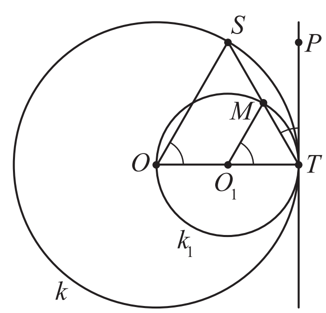
1. От задача 1 от урока следва, че ΔOMO_1 е правоъгълен. Използвайте свойството на катета срещу ъгъл от 30° в правоъгълните триъгълници MTO_1 и MOO_1.



2. Ако A и A_1 са допирните точки на t с k и k_1, разгледайте правоъгълните триъгълници AOM и A_1O_1M с $\sphericalangle M = 30°$. Като вземете предвид, че $OO_1 = r + r_1$, докажете, че $r = 3r_1$. Ако P е общата точка на k и k_1, от $OP = r$ и $OM = 2r$ следва, че P е средата на OM.



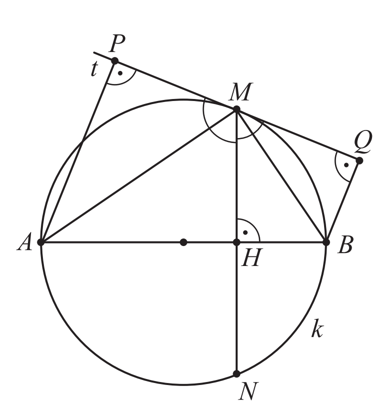
3. Ако T_1T_2 пресича правата O_1O_2 в точка M, постройте $O_2H \parallel MT_1$.
Докажете, че ΔO_1O_2H $\sphericalangle H = 90°$, $O_1H = r_1 - r_2 = 4$, $O_2H = 4$ и $\sphericalangle O_1O_2H = 45°$.



4. а) Използвайте, че $\sphericalangle PTS = \frac{1}{2}\sphericalangle TO_1M$ и $\sphericalangle PTS = \frac{1}{2}\sphericalangle TOS$ (връзка между периферния ъгъл и съответния му централен ъгъл) и докажете, че $O_1M \parallel OS$ и O_1M е средна отсечка в ΔOTS.
б) Докажете, че ΔOTS е равностранен. Тогава $\sphericalangle PTS = 30°$.

70. Окръжност. Обобщение

1. Докажете, че четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност.



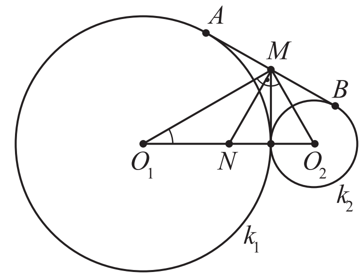
2. Ако P и Q са петите на перпендикулярите, спуснати от A и B към правата t, а H е пресечната точка на AB и MN, докажете, че $\sphericalangle AMP = \sphericalangle AMN$, $\sphericalangle BMQ = \sphericalangle BMN$, $\Delta AMP \cong \Delta AMH$ и $\Delta BMQ \cong \Delta BMH$.

3. Окръжностите k_1 и k_2 се допират външно, тъй като $O_1O_2 = R_1 + R_2$.

Дължината на отсечката MN може да се пресметне по два начина.

I начин. От задача 4 от урока следва, че $MN = \dfrac{R_1 + R_2}{2} = 4$.

II начин. В правоъгълния ΔO_1MO_2 (вж. задача 1 от урок 69) MN е медиана и $MN = \dfrac{1}{2}O_1O_2 = \dfrac{R_1 + R_2}{2}$.

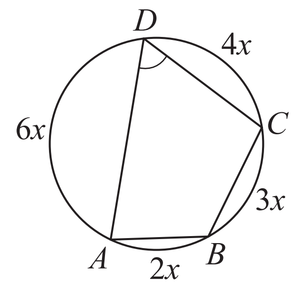


71. Окръжност. Тема за самоконтрол

6. Означаваме $\overset{\frown}{AB} = 2x,\ \overset{\frown}{BC} = 3x,\ \overset{\frown}{CD} = 4x,\ \overset{\frown}{DA} = 6x$ и от $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA} = 15x = 360^\circ$ намираме $x = 24^\circ$.

Градусната мярка на най-малкия ъгъл на четириъгълника е

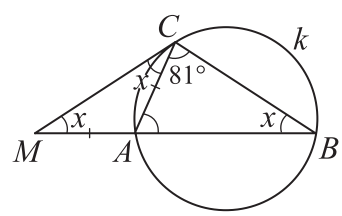
$\sphericalangle ADB = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{ABC} = \dfrac{1}{2}.5x = \dfrac{1}{2}.5.24^\circ = 60^\circ$.



7. Тъй като $\overset{\frown}{ACB} = 198^\circ$, то $\overset{\frown}{AB} = 360^\circ - \overset{\frown}{ACB} = 162^\circ$ и $\sphericalangle ACB = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = 81^\circ$. От $\sphericalangle ABC = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ (вписан ъгъл) и $\sphericalangle MCA = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ (периферен ъгъл) следва, че $\sphericalangle ABC = \sphericalangle MCA = x$.

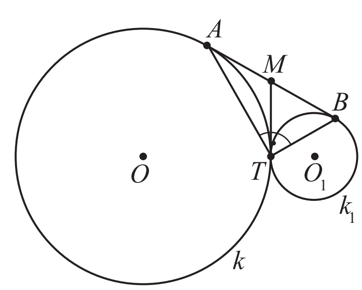
В равнобедрения $\triangle AMC$ $\left(AM = AC\right)$ $\sphericalangle AMC = \sphericalangle MCA = x$.

Сборът на ъглите на $\triangle MBC$ е $3x + 81^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 3x = 99^\circ \Leftrightarrow x = 33^\circ$ и средният по големина ъгъл на $\triangle ABC$ е $\sphericalangle BAC = 180^\circ - \left(81^\circ + 33^\circ\right) = 66^\circ$.



8. От свойството на допирателните MT и MA на k и MB и MT на k_1 следва, че MT е медиана в ΔABT, $MT = \dfrac{1}{2}AB$ и $\sphericalangle ATB = 90^\circ$. В окръжността k от $AT = r$ намираме $\overset{\frown}{AT} = 60^\circ$ и $\sphericalangle BAT = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AT} = 30^\circ$ (периферен ъгъл).

Следователно ъглите на ΔATB са $\sphericalangle ATB = 90^\circ$, $\sphericalangle BAT = 30^\circ$ и $\sphericalangle ABT = 60^\circ$.



8. РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

72. Рационални дроби. Дефиниционно множество

1. Множеството от недопустимите стойности на израза $\frac{x}{x^2-9}+\frac{1}{13}-\frac{6}{x^2+1}$ е $\{\pm 3\}$ (отг. Г);

2. Изразът $\frac{2-x}{x+3}:\frac{x^2-4}{2x}$ е дефиниран при $x+3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -3,\ x^2-4\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm 2$ и $2x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$, т.е. за $x\neq 0,\ x\neq -3,\ x\neq \pm 2$ (отг. Г); **3.** Изразът $\frac{2x+3}{x^2+1}$ е дефиниран при $x^2+1\neq 0$, което е изпълнено за $\forall x\in(-\infty;\ \infty)$ (отг. В);

4. Недопустимите стойности на дадения израз са корените на уравненията:
$2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}=0{,}5;\ \ 1-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 1;\ \ x+2=0 \Leftrightarrow x=-2;$ следователно допустимите стойности са $x\neq 0{,}5;\ \pm 1;\ -2$ (отг. Г); **5.** Недопустимите стойности на израза $\left(\frac{2}{6-x}+\frac{2x}{x-6}\right):\frac{3x+2}{12+2x}$ се определят от корените на уравненията $6-x=0$, $x-6=0$, $3x+2=0$ и $12+2x=0$.
Това са съответно числата 6, 6, $-\frac{2}{3}$, -6 и търсеното множество е $\left\{\pm 6;\ -\frac{2}{3}\right\}$ (отг. А).

84. Рационални дроби. Обобщение

3. а) Дефиниционното множество на уравнението е $DM:\ x\neq -4,\ x\neq -2.$
Тогава $\frac{x+4}{x+2}-\frac{3}{x+4}=\frac{6}{x^2+6x+8} \Leftrightarrow \frac{x+4}{x+2}-\frac{3}{x+4}=\frac{6}{(x+2)(x+4)} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x+4)^2-3(x+2)=6 \Leftrightarrow x^2+8x+16-3x-6=6 \Leftrightarrow x^2+5x+4=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_1=-1\in DM,\ x_2=-4\notin DM.$ Следователно уравнението има единствен корен $x=-1$.
б) $\frac{5}{x^2-3x-4}+\frac{1}{x+1}=\frac{10x}{4-x} \Leftrightarrow \frac{5}{(x+1)(x-4)}+\frac{1}{x+1}=-\frac{10x}{x-4}$. Дефиниционното множество на уравнението е $DM:\ x\neq -1,\ x\neq 4.$
При $x\in DM$: $\frac{5}{(x+1)(x-4)}+\frac{1}{x+1}=-\frac{10x}{x-4} \Leftrightarrow 5+x-4=-10x(x+1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x+1=-10x^2-10x \Leftrightarrow 10x^2+11x+1=0 \Leftrightarrow x_1=-1\notin DM,\ x_2=-\frac{1}{10}\in DM.$
Следователно уравнението има единствен корен $x=-\frac{1}{10}$.
в) Полагаме $\frac{x^2}{x-1}+1=u$ и получаваме уравнението $u^2+9u=10 \Leftrightarrow u^2+9u-10=0$ с корени $u_1=1,\ u_2=-10.$ При $x\neq 1$ решаваме $\frac{x^2}{x-1}+1=1 \Leftrightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0\neq 1$ и
$\frac{x^2}{x-1}+1=-10 \Leftrightarrow x^2+x-1=-10x+10 \Leftrightarrow x^2+11x-11=0 \Rightarrow x_{3,4}=\frac{-11\pm\sqrt{165}}{2}\neq 1$. Следователно уравнението има корени $x_{1,2}=0$, $x_{3,4}=\frac{-11\pm\sqrt{165}}{2}$; г) $\frac{y^2}{y^2-2}+\frac{1}{y^2+2}=\frac{13}{6} \Rightarrow y_{1,2}=\pm 2$

85. Рационални дроби. Тема за самоконтрол

6. $A=\dfrac{x^4+9x^2+20}{x^4+3x^2-4}:\dfrac{x^2+5}{x-1}=\dfrac{\left(\cancel{x^2+5}\right)\left(\cancel{x^2+4}\right)}{\left(x^2-1\right)\left(\cancel{x^2+4}\right)}.\dfrac{x-1}{\cancel{x^2+5}}=\dfrac{\cancel{x-1}}{(x+1)\left(\cancel{x-1}\right)}=\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

7. $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2=7\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\Leftrightarrow\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2-7\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0\Leftrightarrow\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x}-6\right)=0\Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{x}=0\cup\dfrac{1}{x}-6$ $=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}=-1\cup\dfrac{1}{x}=6\Leftrightarrow x_1=-1,\ x_2=\dfrac{1}{6}$ и произведението на корените е $x_1x_2=-\dfrac{1}{6}.$

8. Уравнението е равносилно на $\dfrac{1}{2x(2x+3)}+\dfrac{1}{(x+2)(2x+3)}=\dfrac{3}{2(x+2)(x-2)}$ с дефиниционно множество DM: $x\neq\pm2,\ x\neq0,\ x\neq-\dfrac{3}{2}.$

Определяме НОК = $2x(x+2)(x-2)(2x+3)$ и освобождаваме от знаменател

$(x+2)(x-2)+2x(x-2)=3x(2x+3)\Leftrightarrow x^2-4+2x^2-4x=6x^2+9x\Leftrightarrow 3x^2+13x+4=0$.

Корените на квадратното уравнение са $x_1=-4\in DM$ и $x_2=-\dfrac{1}{3}\in DM$, които са решенията на дробното уравнение.

9. ВПИСАНИ И ОПИСАНИ МНОГОЪГЪЛНИЦИ

86. Окръжност, описана около триъгълник

3. $\sphericalangle AOB=2\gamma=2(180°-35°-75°)=140°.$

4. Триъгълникът BOC е равностранен и $\alpha=\dfrac{1}{2}\sphericalangle BOC=30°$ (отг. А).

5. Съществува единствена точка от симетралата, за която $\sphericalangle AOB=2\gamma$.

6. $\sphericalangle AOB=360°-2.130°=100°.$

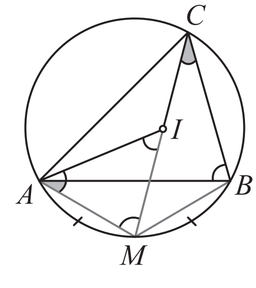
87. Окръжност, вписана в триъгълник

2. $S=r.p=4.\dfrac{13+14+15}{2}=4.21=84$ cm². **3.** От $S=r.p$ получаваме $r=\dfrac{S}{p}=1$ cm.

4. $\sphericalangle AIB=180°-\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=115°.$

88. Описана и вписана окръжност. Упражнение

3. R = 12,5 cm, $r=p-c$ = 3 cm. **4.** От $\sphericalangle AIB=90°+\dfrac{1}{2}\gamma$ следва, че γ = 60° и по същия начин α = 100° и значи β = 20°. **6.** От $\overset{\frown}{MA}=\overset{\frown}{MB}$ следва, че $MA=MB$, $\overrightarrow{CM}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$ и $I\in CM$. При традиционните означения за ъглите на $\triangle ABC$ изразяваме $\sphericalangle AMC=\dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}=\sphericalangle ABC=\beta$ и $\sphericalangle MAB=\dfrac{\overset{\frown}{MB}}{2}=\sphericalangle MCB=\dfrac{\gamma}{2}$. В $\triangle AMI$ от $\sphericalangle AMI=\beta$ и $\sphericalangle MAI=\sphericalangle MAB$



$+\sphericalangle BAI=\frac{\gamma+\alpha}{2}=\frac{180^\circ-\beta}{2}=90^\circ-\frac{\beta}{2}$ следва, че $\sphericalangle AIM=90^\circ-\frac{\beta}{2}$, $\triangle AMI$ е равнобедрен и $MA=MI$. Следователно $MA=MB=MI$.

89. Външновписана окръжност

1. Тъй като $\sphericalangle CAI_b=\frac{1}{2}(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}(180^\circ-80^\circ)=50^\circ$ и $\sphericalangle ACI_b=\frac{1}{2}(180^\circ-\gamma)=\frac{1}{2}(180^\circ-40^\circ)=70^\circ$ следва, че $\sphericalangle AI_bC=180^\circ-50^\circ-70^\circ=60^\circ$ (отг. Б).

2. $CR = p - b = 60{,}5 - 37 = 23{,}5$ cm.

3. Като в зад. 1 получаваме $\sphericalangle AI_cB=60^\circ$, $\sphericalangle BI_aC=55^\circ$ и $\sphericalangle CI_bA=65^\circ$.

4. От $\sphericalangle BMC=\alpha$ и $\sphericalangle MBI_c=\sphericalangle MBI_c=\sphericalangle ABI_c-\sphericalangle ABM=90^\circ-\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\gamma=\frac{1}{2}\alpha$ следва, че $\sphericalangle MI_cB=\frac{1}{2}\alpha$. Следователно $MB = MI_c$, а $MB = MC$ тъй като M е средата на дъгата AB.

90. Ортоцентър в триъгълник

3. От $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, $\sphericalangle AHC=\alpha+\gamma=150^\circ$ и $\sphericalangle BHC=\beta+\gamma=115^\circ$ намираме $\alpha=65^\circ$, $\beta=30^\circ$ и $\gamma=85^\circ$.

4. Триъгълниците AHC_1 и CBC_1 са еднакви ($AH = BC$, $\sphericalangle HAC_1=\sphericalangle BCC_1=90^\circ-\beta$ и $\sphericalangle AC_1C=\sphericalangle CC_1B=90^\circ$), откъдето $AC_1 = CC_1$. Следователно $\sphericalangle BAC=45^\circ$.

91. Забележителни точки в триъгълник. Упражнение

1. От $\sphericalangle BHC=180^\circ-\gamma=136^\circ$ намираме, че $\gamma=44^\circ$. Следователно $\sphericalangle BIC=90^\circ+\frac{1}{2}\gamma=112^\circ$ и $\sphericalangle BOC=2\gamma=88^\circ$.

2. От $\sphericalangle BIC=90^\circ+\frac{1}{2}\gamma=115^\circ$ намираме, че $\gamma=50^\circ$. Следователно $\sphericalangle BHC=180^\circ-\gamma=130^\circ$ и $\sphericalangle BOC=2\gamma=100^\circ$.

3. От $\sphericalangle BOC=2\gamma=140^\circ$ намираме, че $\gamma=70^\circ$. Следователно $\sphericalangle BIC=90^\circ+\frac{1}{2}\gamma=125^\circ$ и $\sphericalangle BHC=180^\circ-\gamma=110^\circ$.

4. Ако C_1 е средата на AB, то CC_1 е медиана (тъй като $M\in CC_1$) и височина (тъй като $O\in CC_1$) и следователно $CA = CB$. Аналогично $BC = BA$.

5. Ако C_1 е петата на височината от C към AB, то CC_1 е височина (тъй като $H\in CC_1$) и ъглополовяща (тъй като $I\in CC_1$) и следователно $CA = CB$. Аналогично $BC = BA$.

92. Вписан четириъгълник

2. $\sphericalangle DAB = 180° - \sphericalangle BCD = 105°$ и $\sphericalangle CDA = 180° - \sphericalangle ABC = 45°$.

3. $\sphericalangle BAC = 180° - \sphericalangle DBC - \sphericalangle ACD - \sphericalangle BDA = 18°$. **4.** Следва от равенствата $\sphericalangle IAI_c = \sphericalangle IBI_c = 90°$.

5. Тъй като $ABCD$ е вписан, то $\sphericalangle ADC + \sphericalangle ABC = 180°$ и тъй като е трапец, то

$\sphericalangle ADC + \sphericalangle DAB = 180°$. Следователно $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DAB$, т.е. трапецът е равнобедрен.

6. От $\sphericalangle AHB = \alpha + \beta$ следва, че $\sphericalangle AH_1B = \alpha + \beta$. Това означава, че

$\sphericalangle ACB + \sphericalangle AH_1B = \alpha + \beta + \gamma = 180°$.

93. Четириъгълник, описан около окръжност

2. От $AB + CD = AD + BC = 2AD$ следва $AD = 34$ cm.

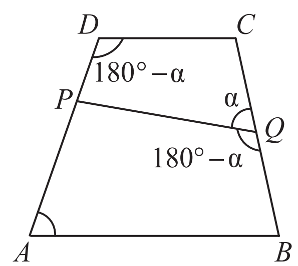
4. Нека AD е най-малката страна и точки $P \in DC$ и $Q \in BC$ са такива, че $DP = AD$ и $CP = CQ$. От $AB + CD = AD + BC$ следва, че $BQ = AB$. Ъглополовящите на $\sphericalangle ADC$, $\sphericalangle DCB$ и $\sphericalangle CBA$ са симетрали на страните на триъгълниците ADP, PCQ и QBA и следователно се пресичат в една точка.

94. Вписани и описани четириъгълници. Упражнение

4. Ако описаните окръжности около ΔAPM и ΔBPN се пресичат в точка S, докажете, че $AMSN$ е вписан. Сравнете със задача 5 от стр. 195.

95. Вписани и описани многоъгълници. Тема за самоконтрол

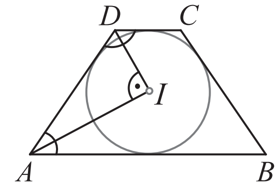
6. От $R = \dfrac{c}{2} = 20{,}5$ и $r = \dfrac{a+b-c}{2} = 4$ намираме $c = 41$, $a + b = 2r + c = 8 + 41 = 49$ и $P = a + b + c = 49 + 41 = 90$ cm. Може да използваме и равенството $r = p - c \Leftrightarrow p = r + c = 4 + 41 = 45$ и $P = 2p = 90$ cm.



7. Означаваме $\sphericalangle BAD = \alpha$. Тогава $\sphericalangle BQP = 180° - \alpha$ ($ABQP$ е вписан четириъгълник), $\sphericalangle PQC = 180° - \sphericalangle BQP = 180° - \alpha$ (съседни ъгли). От вписания четириъгълник $PQCD$ намираме $\sphericalangle PDC = 180° - \sphericalangle PQC = 180° - \alpha$. Тогава $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC = 180°$, от което следва, че $AB \parallel CD$.

8. Тъй като AI и DI са ъглополовящи на $\sphericalangle BAD$ и $\sphericalangle ADC$, то

$$\sphericalangle DAI + \sphericalangle ADI = \frac{\sphericalangle BAD}{2} + \frac{\sphericalangle ADC}{2} = \frac{\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC}{2} = \frac{180°}{2} = 90°.$$



Тогава в $\triangle AID$ $\sphericalangle AID = 90°$. От питагоровата теорема намираме $AD^2 = AI^2 + DI^2 = 225 + 64 = 289$ и $AD = 17$ cm. Тъй като $ABCD$ е описан четириъгълник, то $AB + CD = AD + BC = 2AD = 34$ cm.

10. ГОДИШЕН ПРЕГОВОР

96. Основни комбинаторни понятия

3. Трябва да се изберат едно четно и едно нечетно и число, общо 6.8 = 48 начина (отг. Г).

5. а) $P_6 = 120$; **б)** $V_8^4 = 8.7.6.5 = 1680$; **в)** $C_{11}^3 = \dfrac{11.10.9}{1.2.3} = 165$; **г)** $P_3 + V_4^3 + C_5^2 = 6 + 4 + 10 = 20$;

6. $5! = 120$; **7. Г)**; **8.** $C_{11}^3 = \dfrac{11.10.9}{1.2.3} = 165$. **9.** $C_5^2 + C_4^1 = 10 + 4 = 14$.

10. Трите числа трябва да бъдат или три четни или едно четно и две нечетни. От $C_7^3 = 35$ и $C_7^1 + C_9^2 = 7 + 36 = 43$ следва, че броят на начините е 78.

97. Вектор. Средна отсечка на триъгълник и трапец.

1. а) $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BD}$; **б)** $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AA} = \vec{o}$; **в)** $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OB}$;

г) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$ или $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DC}$;

д) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

2. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \dfrac{2}{3}\vec{a}$; $\overrightarrow{BM} = \vec{b} - \dfrac{1}{3}\vec{a}$; $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 2\vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{a}$.

3. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \dfrac{4}{7}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \dfrac{4}{7}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = \vec{a} + \dfrac{4}{7}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \vec{a} + \dfrac{4}{7}\vec{b} - \dfrac{4}{7}\vec{a} = \dfrac{3}{7}\vec{a} + \dfrac{4}{7}\vec{b}$. **4.** $N(2; 5)$.

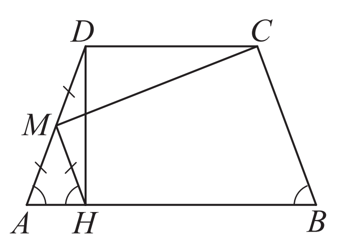
5. От $\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (правило на успоредника) следва, че $\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{4}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$.

Тогава $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \dfrac{3}{4}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) - \vec{a} = \dfrac{3}{4}\vec{b} - \dfrac{1}{4}\vec{a}$.

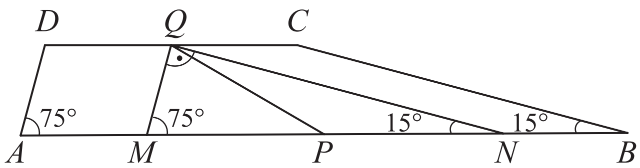
Средна отсечка на триъгълник и трапец

1. От $DM = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{1}{2}BC = BN$ и $DM \parallel BN$ следва, че $MBND$ е успоредник и $BM \parallel DN$. В ΔAQD M е средата на AD и $MP \parallel DQ$. Тогава P е средата на AQ и $AP = PQ = 5$ cm. Аналогично се доказва, че Q е средата на PC и $CQ = PQ = 5$ cm. Следователно $AC = 15$ cm.

2. В правоъгълния $\triangle AHD$ отсечката HM е медиана, $HM = \dfrac{AD}{2} = AM$, $\triangle AHM$ е равнобедрен и $\sphericalangle HAM = \sphericalangle AHM$. Трапецът $ABCD$ е равнобедрен и $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC$. Тогава $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AHM$, $HM \parallel BC$ и $BCMH$ е трапец с основи $MH < BC$ $\left(MH = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{BC}{2}\right)$.

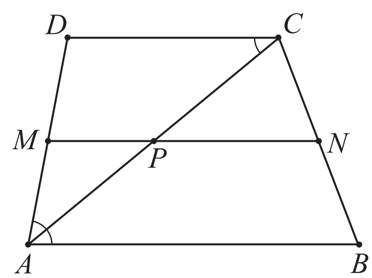


3. През средата Q на малката основа CD построяваме отсечките $QM \parallel AD$ и $QN \parallel BC$, $M,\ N \in AB$ (успоредно пренасяне на двете бедра, вижте с. 52 от учебника).



Тогава $MN = AB - CD = CD$, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle NMD = 75°$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle MND = 15°$, QP е медиана в правоъглъния $\triangle MNQ$ и $QP = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}CD$. Следователно $PQ : CD = 1:2$.

4. От $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD$ (AC е ъглополовяща на $\sphericalangle BAD$) и $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BAC$ (кръстни ъгли) следва, че $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACD$, ΔACD е равнобедрен с бедра $AD = CD = 18$ cm. Точката P е средата на диагонала AC. Тогава в ΔABC и ΔACD PN и MP са средни отсечки и $MP = \frac{1}{2}CD = 9$ cm, $PN = \frac{5}{3}MP = 15$ cm и $AB = 2PN = 30$ cm. Основите на трапеца са $AB = 30$ cm и $CD = 18$ cm.



98. Квадратен корен и квадратно уравнение. Квадратен корен

1. а) $2\sqrt{7} > 3\sqrt{3} \iff \sqrt{28} > \sqrt{27}$; **б)** $\sqrt{29} < 5{,}4 \iff \sqrt{29} < \sqrt{29{,}16}$;

в) $17\sqrt{3} < 4\sqrt{55} \iff \sqrt{867} < \sqrt{880}$.

2. а) $\dfrac{51}{\sqrt{17}} = \dfrac{51\sqrt{17}}{17} = 3\sqrt{17}$; **б)** $\dfrac{13}{\sqrt{35}+\sqrt{22}} = \dfrac{13\left(\sqrt{35}-\sqrt{22}\right)}{13} = \sqrt{35}-\sqrt{22}$;

в) $\dfrac{15}{\sqrt{74}-8} = \dfrac{15\left(\sqrt{74}+8\right)}{10} = \dfrac{3\left(\sqrt{74}+8\right)}{2}$.

3. Ако $a = \sqrt{7}+\sqrt{3}$, $b = \sqrt{7}-\sqrt{3}$ и $h = \sqrt{21}$, то

$S = 2(a+b)h = 2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\sqrt{21} = 2.2\sqrt{7}.\sqrt{21} = 28\sqrt{3}$ m^2.

4. $\left(9\sqrt{3}-\sqrt{235}\right)\left(9\sqrt{3}+\sqrt{235}\right) - 11 = 81.3 - 235 - 11 = -3$ (отг. Б). **5.** $x^2 = 6.150 = 900$ и $x = 30$ m.

Квадратни уравнения

4. а) Условията $D \geq 0$ и $x_1x_2 > 0$ за еднакви знаци на корените са изпълнени за уравненията $x^2 - 6x + 2 = 0$ $\left(D_1 = 7,\ x_1x_2 = 2\right)$ и $2x^2 + 5x + 1 = 0$ $\left(D_1 = 17,\ x_1x_2 = \dfrac{1}{2}\right)$.

б) Условията $D > 0$, $x_1x_2 > 0$ и $x_1 + x_2 < 0$ за различни отрицателни корени са налице за уравненията

$x^2+5x+1=0$ $(D=21,\ x_1x_2=1,\ x_1+x_2=-5)$ и $-2x^2-7x-3=0$ $\left(D=25,\ x_1x_2=\dfrac{3}{2},\ x_1+x_2=-\dfrac{7}{2}\right)$.

5. а) $\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-x-1}=\dfrac{(x-5)(x-1)}{(x-1)(2x+1)}=\dfrac{x-5}{2x+1}$; б) $\dfrac{x^2+x-30}{2x^2-9x-5}=\dfrac{(x+6)(x-5)}{(x-5)(2x+1)}=\dfrac{x+6}{2x+1}$;

в) $\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-x-1}+\dfrac{x^2+x-30}{2x^2-9x-5}=\dfrac{x-5}{2x+1}+\dfrac{x+6}{2x+1}=\dfrac{2x+1}{2x+1}=1$.

6. а) $d=6$, $x_1=2,\ x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$; **б)** $d=10$, $x=-2$; **в)** $d=0$, $x_1=3,\ x_2=0,\ x_3=-1$.

7. а) $x_{1,2}=\pm 1$; **б)** $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$; **в)** $x_{1,2}=\pm\sqrt{2},\ x_{3,4}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

8*. При $a=0$ уравнението е $-2x^2+1=0$ и има два корена $x_{1,2}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

При $a\neq 0$ уравнението $ax^4-2x^2+1=0$ ще има две решения, когато съответното му квадратно уравнение $ay^2-2y+1=0$ има единствен положителен корен.

Възможни са два случая: $y_1<0<y_2$ или $y_1=y_2,\ y_1>0$.

Условието $y_1<0<y_2$ е равносилно на $y_1y_2<0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a}<0 \Leftrightarrow a<0$.

Дискриминантата на $ay^2-2y+1=0$ е $D_1=1-a$ и от $D_1=0$ намираме $a=1$ и $y_{1,2}=1$ е двоен положителен корен. Следователно при $a=0$, $a<0$ или $a=1$ биквадратното уравнение ще има два различни реални корена. Полученият резултат записваме така: $a\in(-\infty;\ 0]\cup\{1\}$.

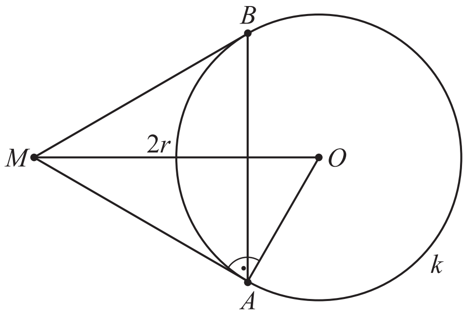
9. а) $u=x^2+2x$, $u_1=-1,\ u_2=3$, $x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=-3$;

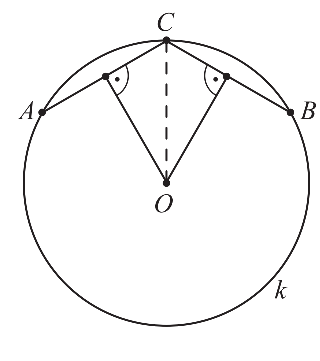
б) $u=x^2-6x$, $u_1=-5,\ u_2=-8$, $x_1=1,\ x_2=5,\ x_3=4,\ x_4=2$;

в) $u=2x^2-x$, $u_1=6,\ u_2=3$, $x_1=2,\ x_2=-\dfrac{3}{2},\ x_3=-1,\ x_4=\dfrac{3}{2}$.

99. Окръжност

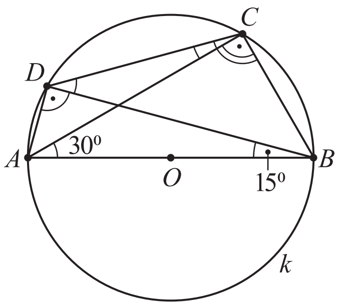
1. Докажете, че ΔAMB е равностранен.
Тогава $MA=MB=AB=2$ cm.

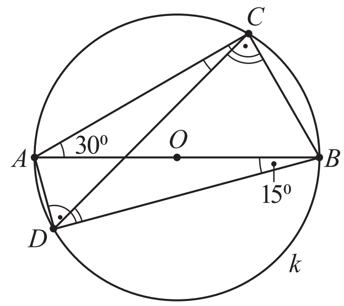


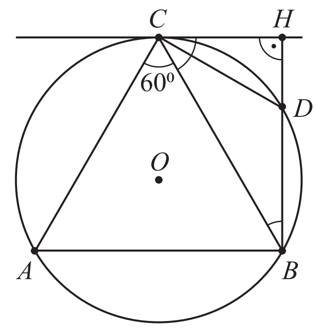


2. Хордите са равни, тъй като са на равни разстояния от центъра O. Използвайте, че CO е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$ и докажете, че $AC=BC=2CO=12$.

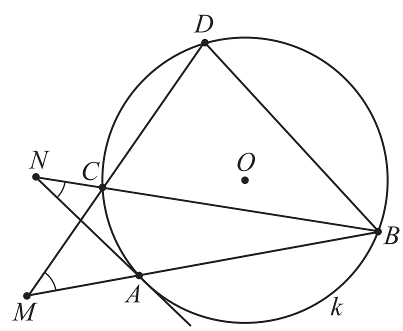
3. а) $\sphericalangle ACD = 15°,\ \sphericalangle CDB = 30°,\ \sphericalangle BCD = 105°$; **б)** $\sphericalangle ACD = 15°,\ \sphericalangle CDB = 30°,\ \sphericalangle BCD = 75°$.







4. Използвайте, че от $CD = r$ следва, че $\overset{\frown}{CD} = 60°$.
Ако H е общата точка на BD и t, докажете, че
$\sphericalangle CBD = \sphericalangle HCD = \sphericalangle BCD = 30°$, $\overset{\frown}{BDC} = 120°$ и $\sphericalangle BAC = 60°$.



5. а) $\sphericalangle BMD = \dfrac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}\right) = \dfrac{1}{2}\left(120° - 30°\right) = 45°$,

$\sphericalangle ANB = \dfrac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AC}\right) = \dfrac{1}{2}\left(100° - 30°\right) = 35°$.

б) От $\sphericalangle BMD = \dfrac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}\right)$, $\sphericalangle ANB = \dfrac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AC}\right)$

и $\sphericalangle BMD = 2\sphericalangle ANB$ следва, че $\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC} = 2\left(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AC}\right)$ и

$\overset{\frown}{AC} = 2\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{BD} = 200° - 120° = 80°$.

6. $R : r = 3 : 1$, $OP : PM = 1 : 1$ (вж. задача 2 след урок 69).

100. Рационални изрази

4. а) При $DM\colon\ x \neq -2,\ x \neq -4$ уравнението е равносилно на $\dfrac{x+4}{x+2} - \dfrac{3}{x+4} = \dfrac{6}{(x+2)(x+4)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+4)^2 - 3(x+2) = 6 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1 \in DM,\ x_2 = -4 \notin DM.$

Следователно уравнението има единствен корен $x = -1$.

б) При $DM\colon\ x \neq 4,\ x \neq 3,\ x \neq 0$ уравнението е равносилно на

$$\frac{8}{(x-4)(x-3)} + \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x(x-4)} \Leftrightarrow 8x + (x-3)x = x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x_1 = -1 \in DM,\ x_2 = -3 \in DM.$

Следователно уравнението има две решения: $x_1 = -1,\ x_2 = -3.$

в) При $DM\colon\ x \neq 1,\ x \neq -4$ уравнението е равносилно на

$$\frac{5}{(x-1)(x+4)}-\frac{1}{x-1}=-\frac{10x}{x+4}\Leftrightarrow 5-(x+4)=-10x(x-1)\Leftrightarrow 10x^2-11x+1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1=1\notin DM,\ x_2=\frac{1}{10}\in DM.$$

Следователно уравнението има единствен корен $x=\frac{1}{10}$.

г) При $DM: x\neq 2,\ x\neq -3$ уравнението е равносилно на

$$\frac{5}{(x-2)(x+3)}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}=1\Leftrightarrow 5-x-3+x-2=x^2+x-6\Leftrightarrow x^2+x-6=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1=2\notin DM,\ x_2=-3\notin DM.$$

Следователно уравнението няма решение.

д) При $DM: x\neq \pm 2$ уравнението е равносилно на $\frac{x^2}{(x+2)(x-2)}=-\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2=-x+2+2x+4\Leftrightarrow x^2-x-6=0\Leftrightarrow x_1=3\in DM,\ x_2=-2\notin DM.$$

Следователно уравнението има единствен корен $x=3$.

е) При $DM: x\neq 0,\ x\neq \pm 2,\ x\neq -\frac{3}{2}$ уравнението е равносилно на

$$\frac{1}{2x(2x+3)}+\frac{1}{(2x+3)(x+2)}=\frac{3}{2(x+2)(x-2)}\Leftrightarrow x^2-4+2x(x-2)=3x(2x+3)\Leftrightarrow 3x^2+13x+4$$

$$=0\Leftrightarrow x_1=-4\in DM,\ x_2=-\frac{1}{3}\in DM.$$

Следователно уравнението има две решения: $x_1=-4,\ x_2=-\frac{1}{3}$.

ж) Полагаме $u=1+\frac{1}{x-1}$ и получаваме уравнението $u^2-2u-3=0$ с корени $u_1=-1$ и $u_2=3$.

От $1+\frac{1}{x-1}=-1\Leftrightarrow \frac{1}{x-1}=-2\Leftrightarrow x-1=-\frac{1}{2}$ намираме $x=\frac{1}{2}$, а от

$1+\frac{1}{x-1}=3\Leftrightarrow \frac{1}{x-1}=2\Leftrightarrow x-1=\frac{1}{2}$ получаваме $x=\frac{3}{2}$. Следователно уравнението има две решения: $x_1=\frac{1}{2},\ x_2=\frac{3}{2}$.

5. $\frac{5x^2}{x^2-4xy+4y^2}:\left(\frac{\sqrt{5}x}{x-2y}\right)^3=\frac{5x^2}{(x-2y)^2}.\frac{(x-2y)^3}{5\sqrt{5}x^3}=\frac{x-2y}{\sqrt{5}x}.$

6. Нека скоростта на течението е x km/h $(0<x<10)$.

Скоростта на лодката по течението е $10+x$ и ще измине разстоянието за време $\frac{45,5}{10+x}$.

Срещу течението лодката ще се движи със скорост $10+x$ за време $\frac{45,5}{10-x}$.

Общото време на движение на лодката е $13-3=10$.

От $\frac{45,5}{10+x}+\frac{45,5}{10-x}=10\Leftrightarrow \frac{9,1}{10+x}+\frac{9,1}{10-x}=2\Leftrightarrow 9,1(10-x)+9,1(10+x)=2(100-x^2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 182=200-2x^2\Leftrightarrow x^2=9$ намираме, че търсената скорост е $x=3$ km/h.

101. Вписани и описани многоъгълници

7. Следва от $AB+CD=AD+BC \Leftrightarrow 33+19=AD+29 \Leftrightarrow AD=23\,\text{cm}$.

8. Следва от $\sphericalangle IBJ=\sphericalangle ICJ=90^\circ$;

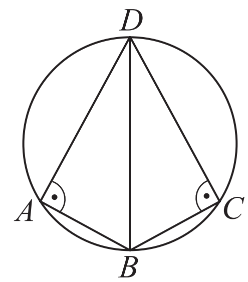
9. Следва от $\sphericalangle AXT+\sphericalangle BXT=\sphericalangle CZT+\sphericalangle CYT=180^\circ$.

102. Изходно равнище. Тема за самоконтрол

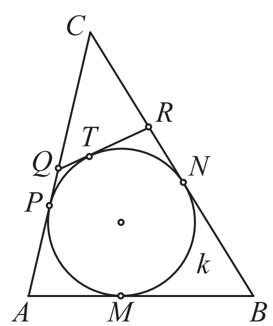
6. Времето на изкачване е $\dfrac{9}{v}$, а на слизане е $\dfrac{9}{v+2}$. По условие $\dfrac{9}{v}-\dfrac{9}{v+2}=\dfrac{45}{60}=\dfrac{3}{4}$. При $v>0$

$\dfrac{9}{v}-\dfrac{9}{v+2}=\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \dfrac{3}{v}-\dfrac{3}{v+2}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 12(v+2)-12v=v(v+2) \Leftrightarrow v^2+2v-24=0$ с корени

$v_1=4$ (решение) и $v_2=-6$ (не е решение). Следователно $v=4$ km/h.



7. Четириъгълникът *ABCD* е описан и от $AB+CD=AD+BC$ и условието $AB=BC$ следва, че $AD=CD$. Тогава $\triangle ABD\cong\triangle CBD$ по трети признак и $\sphericalangle BAD=\sphericalangle BCD$. Но $\sphericalangle BAD+\sphericalangle BCD=180^\circ$, тъй като *ABCD* е вписан. Следователно $\sphericalangle BAD=90^\circ$.



8. Нека окръжността *k* е вписана в $\triangle ABC$, а *M*, *N* и *P* са допирните ѝ точки със страните му. Като вземем предвид, че $QT=QP,\ RT=RN$ и $CP=CN=\dfrac{AC+BC-AB}{2}=\dfrac{12}{2}=6$ (допирателни отсечки към *k*), за периметъра на $\triangle CQR$ получаваме:

$P_{CQR}=CQ+QT+TR+RC=CQ+QP+RN+CR$
$=CP+CN=2CP=2.6=12.$

СЪДЪРЖАНИЕ

КНИГА ЗА УЧИТЕЛЯ
по математика
за 8. клас

Автори
Проф. Емил Колев
Иван Георгиев
Стелиана Кокинова

Редактор
Таня Славчева

Графичен дизайн
Николай Пекарев

Коректор
Мила Томанова

Българска. Първо издание/преработено, 2024 г.
Формат 60x90/8. Печатни коли 12
ISBN 978-954-18-1061-3

Издателство
„Клет България“ ООД
1756 София, ул. „Лъчезар Станчев“ № 5,
комплекс „Софарма Бизнес Тауърс“,
сграда А, ет. 12, тел.: 0700 47 400,
e-mail: info@klett.bg, www.klett.bg

ISBN 978-954-18-1061-3
9 789541 810613